Übungen zur Kursvorlesung für Lehramtsstudierende
Anordnungsaspekte in der Elementargeometrie

Sommersemester 2008 Blatt 4

W.Knapp Tübingen, den 26. Mai 2008

Im Folgenden sei stets $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}; \mathrm{I}, \perp, \mathcal{Z})$ eine angeordnete metrische Ebene und $P, Q, R \in \mathcal{P}$ seien Punkte von $\mathcal{E}$.

12. Beweisen Sie:
   (i) Wenn (P, r) und (Q, r) Strahlen in $\mathcal{E}$ sind, so gilt $P = Q$.
   (ii) Wenn für eine Bewegung β von $\mathcal{E}$ und zwei Strahlen (P, r) und (Q, s) die Beziehung $r^\beta = s$ gilt, so gilt auch $P^\beta = Q$. (4 Punkte)

13. Σ_P bezeichne die Menge aller Strahlen (P, r) mit Quellpunkt P, das „Strahlenbüschel" um P. Wir betrachten die Gruppe $G := B(\mathcal{E})_P$ aller Bewegungen, welche den Punkt P festlassen, $G^+ := B^+(\mathcal{E})_P$ die Gruppe aller eigentlichen Bewegungen, welche P festlassen; G^+ ist dann die Gruppe aller Drehungen um den Punkt P. G wirkt in natürlicher Weise auf Σ_P via $(P, r)^\sigma := (P, r^\sigma)$. Beweisen Sie:
   (i) G wirkt transitiv auf Σ_P und für alle Geraden $a \in [P]$ gilt $G_{(P,a^+)} = G_{(P,a^-)} = \langle \sigma_a \rangle$, wenn a^+ und a^- die beiden Seiten von P in a bezeichnen.
   (ii) G^+ ist abelsch und wirkt scharf transitiv (regulär) auf Σ_P.
   (iii) Für alle $a \in [P]$ ist $G_a = \{\mathrm{id}, \sigma_a, \sigma_b, \eta_P\} \cong Z_2 \times Z_2$ mit $b \in [P]$ derart, dass $a \perp b$ gilt; dabei ist $\eta_P = \sigma_a \sigma_b \in G^+$.
   $\langle \eta_P \rangle$ ist der Kern der Wirkung von G auf $[P]$.
   (iv) $G = \langle \sigma_a \rangle \ltimes G^+$ und G^+ ist ein Normalteiler von G vom Index 2.
   (8 Punkte)

14. Sei $\mathcal{E}$ *euklidisch*. Dann führen wir in $\mathcal{G}$ eine ternäre Zwischenrelation $\overline{\mathcal{Z}} \subseteq \mathcal{G}^3$ ein durch:
$$(g, h, k) \in \overline{\mathcal{Z}} \text{ genau dann, wenn } (P, Q, R) \in \mathcal{Z}$$
   gilt für $P = gt, Q = ht, R = kt$ mit einer Gerade t derart, dass $g, h, k \perp t$ gilt.
   (i) Zeigen Sie, dass die Relation $\overline{\mathcal{Z}}$ wohldefiniert ist.
   (ii) Wie lassen sich die Resultate über die Zwischenanordnung von $[t]$ auf die ganze (euklidische) Parallelenschar $O(t) = \{g \in \mathcal{G} : g \perp t\}$ für eine feste Gerade t übertragen? Wie sind hierbei die analogen Begriffe zu *Seite* bzw. *Strahl* zu bilden?

Die Übungsaufgaben 12 und 13 sind am Dienstag, dem 3. Juni 2008, vor der Vorlesung abzugeben.