Übungen zur Kursvorlesung für Lehramtsstudierende
Anordnungsaspekte in der Elementargeometrie

Sommersemester 2008 Blatt 6

W.Knapp Tübingen, den 23. Juni 2008

Im Folgenden sei $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathrm{I}, \perp, \mathcal{Z})$ stets eine angeordnete metrische Ebene, in welcher das Axiom FB der freien Beweglichkeit gilt.

19. Beweisen Sie, dass je zwei Strecken $\langle AB \rangle$ und $\langle CD \rangle$ in $\mathcal{E}$ bei geeigneter Wahl der Zwischenanordnungen auf $[AB]$ bzw. $[CD]$ als geordnete Mengen isomorph sind, d.h. es existiert eine bijektive in beiden Richtungen ordnungserhaltende Abbildung von $\langle AB \rangle$ auf $\langle CD \rangle$.

   (4 Punkte)

   Hinweis: Betrachten Sie zuerst die Seitenstrecken eines Dreiecks. Führen Sie den allgemeinen Fall auf diesen Sonderfall zurück.

20. Nun sei $(K, <)$ ein angeordneter Körper und $\mathcal{E} = \mathrm{Eb}\,(K, <)$ die angeordnete metrische Ebene von Übungsaufgabe 6 mit $\mathcal{P} = K^2$. Seien $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2), C = (c_1, c_2)$ drei nicht kollineare Punkte und $\mathbb{D} = \langle AB \rangle \cup \langle BC \rangle \cup \langle CA \rangle$ das zugehörige Dreieck, siehe Satz (3.1) der Vorlesung.
   Bestimmen Sie das Innere $\mathcal{P}^+_{\mathbb{D}}$ und das Äußere $\mathcal{P}^+_{\mathbb{D}}$ von $\mathbb{D}$. Geben Sie (in Abhängigkeit von den gegeben Daten) eine Gerade $g \in \mathcal{G}$ an derart, dass $[g] \subseteq \mathcal{P}^-_{\mathbb{D}}$ gilt.

   (4 Punkte)

21. Die Ebene $\mathcal{E}$ habe folgende Eigenschaft (#): Wenn zwei Geraden sich in keinem Punkt schneiden, so schneidet jede andere Gerade die beiden Geraden nicht oder sie schneidet alle beide.
   Beweisen Sie:
   (i) Für je endlich viele Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_m$ der Ebene gibt es ein Dreieck, in dessen Innerem alle gegebenen Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_m$ liegen.
   (ii) Wenn $\mathcal{E}$ euklidisch ist, so hat $\mathcal{E}$ die erforderliche Eigenschaft (#). Wenn $\mathcal{E}$ hyperbolisch ist, so hat $\mathcal{E}$ diese Eigenschaft nicht.
   (iii) Die Aussage von (i) ist in der reellen hyperbolischen Ebene $\mathbb{H}$ falsch.

   (4 Punkte)

Die Übungsaufgaben sind am Dienstag, dem 1. Juli 2008, vor der Vorlesung abzugeben.