Übungen zur Vorlesung Elementare Geometrie

Sommersemester 2007 Blatt 1

W.Knapp Tübingen, den 22. März 2007

1. Es sei $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathrm{I})$ eine „Inzidenzebene“ mit der Punktmenge $\mathcal{P}$ und der Geradenmenge $\mathcal{G}$, für welche die Inzidenzaxiome I.1, I.2 und I.3 gelten. Beweisen Sie:
   Wenn die Anzahl der Punkte unendlich ist, so ist auch die Anzahl der Geraden unendlich und umgekehrt.
   Gilt diese Aussage auch, wenn man auf das Axiom I.3 verzichtet? (4 Punkte)

2. Sei K ein Körper und V sei ein 3-dimensionaler K-Vektorraum. Mit $u_k V$ bezeichnen wir die Menge der k-dimensionalen Unterräume von V.
   Wir betrachten die Inzidenzebene $\mathrm{PG}(V) = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathrm{I})$ mit $\mathcal{P} := u_1 V$, $\mathcal{G} := u_2 V$ und $\mathrm{I} := \{(U, W) \mid U \subset W\}$. Beweisen Sie:
   (a) In $\mathrm{PG}(V)$ gelten die Inzidenzaxiome I.1, I.2, I.3 . Darüberhinaus gilt auch noch das Inzidenzaxiom
   I.4 : *Je zwei Geraden besitzen einen Schnittpunkt.*
   (b) Zeichnen Sie für den Fall $K = \mathbb{F}_2$ ein Bild von $\mathrm{PG}(K^3)$.
   (c) Beweisen Sie: Wenn K ein endlicher Körper mit genau q Elementen ist, so gilt $|u_1 V| = q^2 + q + 1 = |u_2 V|$, jede Gerade von $\mathrm{PG}(V)$ ist mit genau $q + 1$ Punkten inzident und durch jeden Punkt gehen genau $q + 1$ Geraden.
   (8 Punkte)

   Definition: Eine Inzidenzebene $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathrm{I})$, in welcher alle Inzidenzaxiome I.1, I.2, I.3 und I.4 erfüllt sind, heißt eine *projektive Ebene*. Demnach ist $\mathrm{PG}(V)$ eine projektive Ebene.

3. Sei $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathrm{I})$ eine projektive Ebene mit der Eigenschaft, dass auf einer gegebenen Geraden $h \in \mathcal{G}$ genau $n+1$ Punkte liegen mit einer natürlichen Zahl $n \geq 2$. Beweisen Sie:
   (a) $|\mathcal{P}| = |\mathcal{G}| = n^2 + n + 1$.
   (b) Auf jeder Geraden $g \in \mathcal{G}$ liegen genau $n + 1$ Punkte.
   (c) Durch jeden Punkt $P \in \mathcal{P}$ gehen genau $n + 1$ Geraden.

   Hinweis: Man bezeichnet in diesem Fall n als die *Ordnung* der projektiven Ebene $\mathcal{E}$. Im Fall $K = \mathbb{F}_q$ hat demnach die projektive Ebene $\mathrm{PG}(K^3)$ die Ordnung q.

Die Übungsaufgaben 1 und 2 sind schriftlich zu bearbeiten und vor der Vorlesung am Dienstag, dem 8. Mai 2007, abzugeben. Die Übungsaufgabe 3 wird schon in der ersten Übungsstunde behandelt.