4. Sei K ein kommutativer Körper, in welchem die Bedingung $x^2+y^2 = 0 \Rightarrow (x,y) = (0,0)$ erfüllt ist.
   Zeigen Sie, dass $\mathrm{Eb}(K) = (\mathcal{P}, \mathcal{G}; \mathrm{I}, \perp)$ wie in (1.7) der Vorlesung definiert eine allgemeine metrische Ebene ist, d.h. die Axiome I.1, I.2, I.3, S.1, S.2 und S.3 sind in $\mathrm{Eb}(K)$ erfüllt. (6 Punkte)

5. Wiederholen Sie das (wahrscheinlich) aus der Schule bekannte Konzept von „Pol und Polare“ in der folgenden Version:
   Betrachte die Ebene $\mathrm{Eb}(\mathbb{R}) = (\mathcal{P}, \mathcal{G}; \mathrm{I}, \perp)$ mit $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$. Es bezeichne $\mathcal{D} := \{X \mid X \in \mathcal{P} \text{ und } \|X\| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe mit Mittelpunkt $O = (0,0)$; $\overline{\mathcal{D}} := \{X \mid X \in \mathcal{P} \text{ und } \|X\| \leq 1\}$ bezeichene die abgeschlossene Einheitskreisscheibe. Damit können wir $\mathcal{S}^1 = \overline{\mathcal{D}} \setminus \mathcal{D}$ als die „Einheitskreislinie“ verstehen.
   (a) Beweisen Sie: Ist $P \in \mathcal{P} \setminus \overline{\mathcal{D}}$, so gibt es genau 2 verschiedene Tangenten von P an die Einheitskreislinie $\mathcal{S}^1$; bezeichnen T_1 und T_2 die beiden Berührpunkte, so heißt die Verbindungsgerade $P^o := T_1T_2$ die *Polare* zu P (in Bezug auf $\mathcal{D}$). Die Polare $g = P^o$ ist eine *Sekante* von $\mathcal{D}$, d.h. $g \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$; der Kreismittelpunkt O ist niemals mit der Polaren P^o inzident. T_1 und T_2 liegen spiegelbildlich zur Verbindungsgeraden OP.
   (b) Beweisen Sie: Jede nicht mit O inzidente Sekante g von $\mathcal{D}$ ist Polare eines eindeutig bestimmten Punkts $P = g^0 \in \mathcal{P} \setminus \overline{\mathcal{D}}$; dieser Punkt g^o heißt der *Pol* von g.
   (c) Diskutieren Sie Möglichkeiten, auch den mit O inzidenten Sekanten von $\mathcal{D}$ (also den „Durchmessern“ von $\mathcal{D}$) auf sinnvolle Weise einen eindeutig bestimmten Pol zuzuordnen. (Es gibt hier verschiedene Möglichkeiten, die allerdings die gleichen Einsichten umsetzen müssen.)

   Hinweis: Sie dürfen hier alle analytisch-geometrischen Hilfsmittel der Schule verwenden.

6. Mit den Bezeichnungen von Übungsaufgabe 5 setzen wir $\mathcal{H} := (\mathcal{D}, \mathcal{G}_s; \mathrm{I}, \perp)$, wobei $\mathcal{G}_s$ die Menge aller Sekanten von $\mathcal{D}$ bezeichne und die Inzidenzrelation $\mathrm{I} := \{(X,g) \mid (X,g) \in \mathcal{D} \times \mathcal{G}_s \text{ und } X \in g\}$ ist. Die Orthogonalitäts-Relation $\perp \subseteq \mathcal{G}_s \times \mathcal{G}_s$ ist auf folgende Weise definiert:
   - Falls $O \,\mathrm{I}\, g$ gilt, gelte $g \perp h$ genau dann, wenn g und h sich in einem Punkt von $\mathcal{D}$ schneiden und in $\mathrm{Eb}(\mathbb{R})$ orthogonal sind.
   - Falls $O \not\mathrm{I}\, g$ gilt, gelte $g \perp h$ genau dann, wenn g und h sich in einem Punkt von $\mathcal{D}$ schneiden und h mit dem Pol von g in $\mathrm{Eb}(\mathbb{R})$ inzident ist.

   Beweisen Sie, dass $\mathcal{H}$ eine allgemeine metrische Ebene ist. (6 Punkte)
   Hinweis: Sie dürfen die Ergebnisse der Übungsaufgabe 5 verwenden.

Die Übungsaufgaben 4 und 6 sind schriftlich zu bearbeiten und vor der Vorlesung am Dienstag, dem 15. Mai 2007, abzugeben.