Übungen zur Vorlesung Elementare Geometrie

Sommersemester 2007 — Blatt 3

W.Knapp Tübingen, den 28. April 2007

Im Folgenden sei stets $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}; \mathrm{I}, \perp)$ eine metrische Ebene. σ_g bezeichne die Spiegelung an der Geraden $g \in \mathcal{G}$.

7. Beweisen Sie: Für jede Gerade $a \in \mathcal{G}$ und jede Orthokollineation $\tau \in \mathrm{OK}(\mathcal{E})$ gilt $\sigma_a{}^\tau = \tau^{-1}\sigma_a\tau = \sigma_{a^\tau}$.

   (3 Punkte)

8. Beweisen Sie:
   (i) Auf jeder von der Achse a verschiedenen Fixgeraden b hat die Spiegelung σ_a höchstens zwei Fixpunkte.
   (ii) Jede Spiegelung σ_a lässt alle Geraden $b \in \mathcal{G}$ mit $a \perp b$ fest, aber nicht punktweise fest.

   (3 Punkte)

9. Versuchen Sie, für die gegebene metrische Ebene $\mathcal{E}$ die folgenden Begriffe auf sinnvolle Weise zu definieren:
   Winkelhalbierende zweier verschiedener Geraden;
   Mittelsenkrechte zweier verschiedener Punkte;
   Mittelparallele zweier Geraden, die sich in keinem Punkt schneiden.
   Gibt es dabei Eindeutigkeitsprobleme?

10. Gelte $\mathrm{Eb}(K) = (\mathcal{P}, \mathcal{G}; \mathrm{I}, \perp)$ für einen kommutativen Körper K, in welchem die Bedingung $x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$ erfüllt ist. Beweisen Sie:
    Wenn zwei Geraden a und a' eine gemeinsame Senkrechte b besitzen, so sind sie parallel, d. h. es gilt $a = a'$ oder $[a] \cap [a'] = \emptyset$.

    (3 Punkte)

11. Bestimmen Sie für den Punkt $R = (1, 1)$ von $\mathrm{Eb}(\mathbb{R}) = (\mathcal{P}, \mathcal{G}; \mathrm{I}, \perp)$ explizit die Menge aller Drehungen $D(R) := \{\sigma_a\sigma_b \mid a, b \in \mathcal{G} \text{ und } [a] \cap [b] \supseteq \{R\}\}$

    (3 Punkte)

Die Übungsaufgaben 7, 8,10 und 11 sind schriftlich zu bearbeiten und vor der Vorlesung am Dienstag, dem 22. Mai 2007 , abzugeben.