Übungen zur Vorlesung Elementare Geometrie

Sommersemester 2007 — Blatt 4

W.Knapp — Tübingen, den 11. Mai 2007

12. Es sei $\mathrm{Eb}\,(K) = (\mathcal{P}, \mathcal{G}; \mathrm{I}, \perp)$ mit einen kommutativen Körper K, in welchem die Bedingung $x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$ erfüllt ist.
Beweisen Sie explizit, dass $\mathrm{Eb}\,(K)$ eine euklidische metrische Ebene ist.

13. Es sei $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}; \mathrm{I}, \perp)$ eine metrische Ebene, in welcher zwei nichteuklidische (hyperbolische) Parallelen $a, b \in \mathcal{G}$ existieren. Beweisen Sie, dass dann die Quasidrehung $\sigma_a\sigma_b$ keinen Fixpunkt besitzt.
(4 Punkte)

14. Welche der Axiome für eine metrische Ebene nach (1.19) der Vorlesung gelten in der *reellen Sphärengeometrie* $\mathfrak{S} = (\mathcal{S}^2, \mathcal{G}; \mathrm{I}, \perp)$, wobei $\mathcal{G} = \{W \cap \mathcal{S}^2 \mid W \in u_2\mathbb{R}^3\}$, I durch die Elementbeziehung induziert wird und $\perp$ durch orthogonales Schneiden der Großkreise wie bei der reellen elliptischen Ebene definiert wird? Kann man auch hier Spiegelungen sinnvoll definieren?

15. In einer euklidischen metrischen Ebene $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}; \mathrm{I}, \perp)$ sei eine Gerade $a \in \mathcal{G}$ mit genau m verschiedenen Punkten inzident. Beweisen Sie:
(a) Für jede Gerade $g \in \mathcal{G}$ gilt $|[g]| = m$.
(b) Für jeden Punkt $P \in \mathcal{P}$ gilt $|[P]| = m + 1$.
(c) $|\mathcal{P}| = m^2$ und $|\mathcal{G}| = m(m+1) = m^2 + m$.
Welche Axiome werden beim Beweis dieser Aussagen nur benötigt?
(4 Punkte)

16. Sei $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}; \mathrm{I}, \perp)$ eine metrische Ebene und $a, b \in \mathcal{G}$ seien zwei verschiedene Geraden derart, dass die zugehörigen Spiegelungen vertauschbar sind : $\sigma_a\sigma_b = \sigma_b\sigma_a$.
Beweisen Sie, dass $V := \{\mathrm{id}, \sigma_a, \sigma_b, \sigma_a\sigma_b\}$ eine Untergruppe der Bewegungsgruppe $B(\mathcal{E})$ ist.
Ist es möglich, dass $\sigma_a\sigma_b = \sigma_c$ für eine Gerade c gilt?
Hinweis: Betrachten Sie die reelle elliptische Ebene und den Fall $a \perp b$.
(4 Punkte)

Die Übungsaufgaben 13, 15 und 16 sind schriftlich zu bearbeiten und vor der Vorlesung am Dienstag, dem 5. Juni 2007, abzugeben.