Übungen zur Vorlesung Elementare Geometrie

Sommersemester 2007 — Blatt 5

W.Knapp — Tübingen, den 9. Juni 2007

17. Sei $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}; \mathrm{I}, \perp)$ eine metrische Ebene und τ eine Kollineation von $\mathcal{E}$. Beweisen Sie:
    (i) Wenn τ involutorisch ist, so liegt jeder Nichtfixpunkt von τ auf einer Fixgeraden von τ.
    (ii) Wenn $\mathcal{E}$ euklidisch ist und τ eine Gerade a und einen Punkt A festlässt, so lässt τ auch die Parallele zu a durch A fest.

    Welche Axiome werden bei diesen Beweisen benötigt?

18. Sei $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}; \mathrm{I}, \perp)$ eine elliptische Ebene.
    (a) Beweisen Sie: Jede Drehung hat mindestens eine Fixgerade und den Pol dieser Geraden als Fixpunkt.
    (In der Vorlesung wird noch bewiesen, dass Fixgerade und Fixpunkt einer Drehung δ eindeutig bestimmt sind, falls $\delta^2 \neq \mathrm{id}$ gilt.)
    (b) Sei $\mathcal{E}$ die reelle elliptische Ebene im Sinne von (1.31) der Vorlesung. Geben Sie eine Drehung δ an, welche den Punkt $P = \mathbb{R}(1,0,0) \cap \mathcal{S}^2$ auf den Punkt $Q = \mathbb{R}(0,1,0) \cap \mathcal{S}^2$ abbildet. Was ist der Fixpunkt von δ und was ist die Fixgerade von δ ?

    (4 Punkte)

19. Es sei $\mathcal{H} = (\mathcal{D}, \mathcal{G}_s; \mathrm{I}, \perp)$ die reelle hyperbolische Ebene im Sinne von (1.32) der Vorlesung.
    Wir betrachten die hyperbolischen Geraden $a = \mathbb{R}(1,0) \cap \mathcal{D}, b = \mathbb{R}(0,1) \cap \mathcal{D}$, $c = \mathbb{R}(1,1) \cap \mathcal{D}$ und $d = ((\frac{1}{2}, 0) + \mathbb{R}(0,1)) \cap \mathcal{D}$.
    (i) Geben Sie Konstruktionsbeschreibungen (Zeichnung oder Rechnung) für die Quasidrehungen $\delta_1 = \sigma_a\sigma_b, \delta_2 = \sigma_a\sigma_c, \delta_3 = \sigma_a\sigma_d, \delta_4 = \sigma_b\sigma_d$.
    (ii) Welche dieser Quasidrehungen sind Drehungen, welche Translationen?
    (iii) Welche dieser Quasidrehungen sind involutorisch?
    (iv) Zeigen Sie, dass $\sigma_a\sigma_b\sigma_c$ eine Spiegelung ist. Was ist die Achse dieser Spiegelung?

    (8 Punkte)

Die Übungsaufgaben 18 und 19 sind schriftlich zu bearbeiten und vor der Vorlesung am Dienstag, dem 12. Juni 2007, abzugeben.