Übungen zur Kursvorlesung Elementare Zahlentheorie

Sommersemester 2010 — Blatt 1

W.Knapp — Tübingen, den 24. März 2010

1. Beweisen Sie den Satz über die Euklidische Division in $\mathbb{Z}$ mittels vollständiger Induktion:

   Sei $0 \neq n \in \mathbb{Z}$. Dann gibt es für jedes $x \in \mathbb{Z}$ eindeutig bestimmte Zahlen $q, r \in \mathbb{Z}$ derart, dass
   $$x = qn + r \text{ mit } 0 \leq r < |n|$$
   gilt.

2. Sei $n \in \mathbb{Z}$ beliebig.
   (a) Beweisen Sie, dass die Relation $\underset{n}{\equiv} := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z} \text{ und } x \equiv y \pmod{n}\}$ eine Äquivalenzrelation in $\mathbb{Z}$ ist.
   (b) Zeigen Sie, dass alle Äquivalenzklassen $\underset{n}{\equiv}(x)$ für $x \in \mathbb{Z}$ von der Gestalt $\underset{n}{\equiv}(x) = x + n\mathbb{Z}$ sind.

3. Beweisen Sie den Satz (1.5) der Vorlesung über die Wohldefiniertheit des Faktorrings $\mathbb{Z}/n$.

4.
   (a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass der Ring $\mathbb{Z}$ nullteilerfrei ist.
   (b) Beweisen Sie, dass die Einheitengruppe $U(\mathbb{Z})$ von $\mathbb{Z}$, definiert als $U(\mathbb{Z}) := \{r \mid r \in \mathbb{Z} \text{ und } \exists s \in \mathbb{Z}\ rs = 1\}$, gleich $\{1, -1\}$ ist.

5. Seien $a, b \in \mathbb{Z}$.
   (a) Zeigen Sie: a und b sind teilerfremd genau dann, wenn Zahlen $u, v \in \mathbb{Z}$ existieren derart, dass $au + bv = 1$ gilt.
   (b) Kann man aus der Gleichung $au + bv = d$ für ein $d \in \mathbb{N}$ und geeigneten $u, v \in \mathbb{Z}$ schließen, dass $d = \mathrm{ggT}(a, b)$ gilt?

Die Übungsaufgaben sind mündlich für die erste Übungsstunde vorzubearbeiten. Keine schriftliche Abgabe!