Übungen zur Kursvorlesung Elementare Zahlentheorie

Sommersemester 2010 Blatt 3

W.Knapp Tübingen, den 24. März 2010

9. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen. Beweisen Sie:
   (a) Für $n \in \mathbb{N}$ und $1 \le k \in \mathbb{N}$ gilt $f_{n+k} = f_k f_{n+1} + f_{k-1} f_n$.
   (b) Ist die natürliche Zahl m ein Teiler der natülichen Zahl n, so ist f_m ein Teiler von f_n.
   (c) Gilt für $m, n \in \mathbb{N}$ die Beziehung $m > n$, so ist $\mathrm{ggT}(f_m, f_n) = \mathrm{ggT}(f_{m-n}, f_n)$.
   (d) Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt $\mathrm{ggT}(f_m, f_n) = f_{\mathrm{ggT}(m,n)}$.

   Hinweis: Für den Beweis von (b) können Sie (a) verwenden. Für den Beweis von (c) können Sie (a) verwenden. Für den Beweis von (d) können Sie (c) verwenden.

10. Bestimmen Sie mit dem Algorithmus von Satz (1.13) der Vorlesung Zahlen $u, v \in \mathbb{Z}$ derart, dass für $d := \mathrm{ggT}(315, -696)$ die Gleichung $315u - 696v = d$ gilt.
    (4 Punkte)

11. Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Man kann (etwa mit dem Algorithmus von Satz (1.13) der Vorlesung) Zahlen $u_0, v_0 \in \mathbb{Z}$ berechnen derart, dass $d := \mathrm{ggT}(a, b) = u_0 a + v_0 b$ gilt.
    Bestimmen Sie davon ausgehend die Gesamtheit aller Zahlen $u, v \in \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft $d = ua + vb$. Wieviele solche Zahlenpaare gibt es?
    Hinweis: Es wird empfohlen, zuerst den Fall $d = 1$ zu betrachten und dann den allgemeinen Fall zu erschließen.

12. Bestimmen Sie alle zu 21 teilerfremden Reste $r \in \{0, 1, \ldots, 20\}$ und berechnen Sie jeweils die Inversen $\overline{r}^{-1} = (r + 21\mathbb{Z})^{-1}$ modulo 21. (4 Punkte)

13. Bestimmen Sie ein $x \in \mathbb{Z}$ derart, dass alle drei Kongruenzbedingungen
    $x \equiv 1 \pmod 5$, $x \equiv 2 \pmod 7$, $x \equiv 3 \pmod{11}$ gelten.
    Wieviele solche Zahlen $x \in \mathbb{Z}$ gibt es mit der Eigenschaft $-1000 \le x \le 1000$?
    (4 Punkte)

Die Übungsaufgaben 10, 12 und 13 sind schriftlich zu bearbeiten und in der Vorlesungspause am Dienstag, dem 4. Mai 2010, abzugeben.