Übungen zur Kursvorlesung Elementare Zahlentheorie

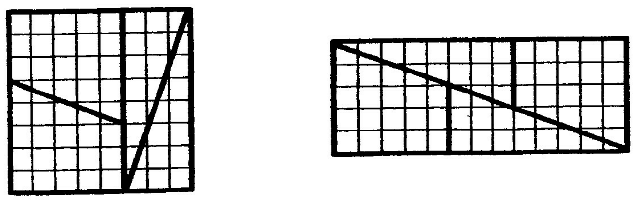
Sommersemester 2010 Blatt 4

W.Knapp Tübingen, den 1. April 2010

14. Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ gegeben.
    (a) Zeigen Sie: Es gibt genau ein $v \in \mathbb{N}$ derart, dass $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = v\mathbb{Z}$ gilt.
    Wir schreiben $v = \mathrm{kgV}(a, b)$ und bezeichnen v als das *kleinste gemeinsame Vielfache* von a und b.
    Warum ist diese Bezeichnung gerechtfertigt?
    (b) Beweisen Sie: Ist $d = \mathrm{ggT}(a, b)$ und $v = \mathrm{kgV}(a, b)$, so gilt die Beziehung $vd = |ab|$. (4 Punkte)

15. Erklären Sie den Sachverhalt, dass sich eine rechteckige Restetafel zu $n = n_1 n_2$ (beim Start in 0) durch Fortschreiten um 1 $(\mathrm{mod}\, n_k)$ jeweils in beiden positiven Richtungen genau dann vollständig auffüllen lässt, wenn $\mathrm{ggT}(n_1, n_2) = 1$ gilt. Kommt es dabei auf den Startpunkt an?

16. Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen.
    Beweisen Sie die sogenannte *Identität von Cassini* [1680]:
    $$f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n \quad \text{für } 0 < n \in \mathbb{N}.$$
    (3 Punkte)
    Cassinis Identität ist die Grundlage einer geometrischen „Paradoxie“ , ein bei Lewis Caroll beliebtes „Rätsel“: Man zerschneide ein 8×8 *- Schachbrett in* 4 *Teile und füge es dann zu einem* 5×13*-Rechteck wie in der Zeichnung angegeben wieder zusammen:*



17. Für eine positive reelle Zahl x bezeichne $\pi(x)$ die Anzahl aller Primzahlen p mit $p \leq x$. Beweisen Sie die folgende seit Langem bekannte elementare Abschätzung: $\pi(x) \geq \log(x) - 1$, wobei log den natürlichen Logarithmus mit $\log(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ bezeichnet. Warum ergibt sich daraus ein neuer Beweis für den Satz von Euklid über die Unendlichkeit der Menge der Primzahlen? (5 Punkte)
    Hinweis: Verwenden Sie die Definition von Logarithmus und Riemann-Integral, den Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie und die Grenzwertformel für die geometrische Reihe.

Die Übungsaufgaben 14, 16 und 17 sind schriftlich zu bearbeiten und in der Vorlesungspause am Dienstag, dem 11. Mai 2010, abzugeben.