Übungen zur Kursvorlesung Elementare Zahlentheorie

Sommersemester 2010 Blatt 5

W.Knapp Tübingen, den 5. Mai 2010

18. Berechnen Sie die g-al-Darstellung von $n = 1023$ für die Basen $g = 2, 3, 5, 6, 8, 16$. Berechnen Sie die Zahlen $n + n$ und n^2 durch Rechnungen im 6-al-System.

(3 Punkte)

19. Sei p eine Primzahl. Beweisen Sie:
    (a) Wenn $p = a^2 + b^2$ für geeignete $a, b \in \mathbb{N}$ gilt, so ist $p = 2$ oder $p \equiv 1 \pmod 4$.
    (b) Wenn $p = a^3 + b^3$ für geeignete $a, b \in \mathbb{N}$ gilt, so ist $p = 2$ und $a = b = 1$.

(4 Punkte)

20. Beweisen Sie die folgenden Rekursionsformeln für die Folge der Fibonacci-Zahlen:
    (a) $f_n = 1 + \sum_{k=0}^{n-2} f_k$ für $2 \leq n \in \mathbb{N}$.
    (b) $f_{2n+1} = 1 + \sum_{k=0}^{n} f_{2k}$ für $1 \leq n \in \mathbb{N}$.

21. Beweisen Sie, dass jede natürliche Zahl n sich in eindeutiger Weise darstellen lässt als Summe

$$(*) \quad n = \sum_{k=0}^{m_n - 1} f_{\lambda_k},$$

mit $m_n \in \mathbb{N}$ unter der Bedingung, dass die Abbildung $\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} : k \mapsto \lambda_k$ stark monoton in dem Sinne ist, dass stets $\lambda_{k+1} > \lambda_k + 1$ gilt. Man schreibt dann für $1 \leq n \in \mathbb{N}$

$$n = \langle \delta_m \delta_{m-1} \delta_{m-2} \ldots \delta_2 \rangle_\phi$$

mit der für alle $j \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ erklärten Regel

$$\delta_j = \begin{cases} 1 & \text{, wenn } f_j \text{ in der Summe } (*) \text{ auftritt,} \\ 0 & \text{, wenn } f_j \text{ in der Summe } (*) \text{ nicht auftritt.} \end{cases}$$

m wird natürlich so gewählt, dass $\delta_m = 1$ gilt und $\delta_j = 0$ für alle $j \geq m$. Warum treten hier niemals hintereinander zwei Einsen auf?
Berechnen Sie diese Darstellung für die natürlichen Zahlen $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 23$, $n = 64$ und $n = 100$.

(5 Punkte)

Diese Darstellung heißt die Darstellung von n im *Fibonacci-Ziffern-System.*

22. Entwerfen Sie einen Additionsalgorithmus für das Fibonacci-Ziffern-System.

Die Übungsaufgaben 18, 19 und 21 sind schriftlich zu bearbeiten und in der Vorlesungspause am Dienstag, dem 18. Mai 2010, abzugeben.