Übungen zur Kursvorlesung Elementare Zahlentheorie

Sommersemester 2010 Blatt 7

W.Knapp Tübingen, den 17. Mai 2010

29. Beweisen Sie Satz (4.5) der Vorlesung:
Falls für jede ungerade Primzahl p die diophantische Gleichung $x^p + y^p = z^p$ keine Lösung $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ mit $0 \neq x, y, z \in \mathbb{Z}$ besitzt, so ist die große Fermatsche Vermutung (Satz 4.2) richtig.

30. Bestimmen Sie alle abc-Treffer mit $c \leq 130$. Welcher Treffer hat die größte Qualität?
(3 Punkte)

31. Sei $1 \leq q \in \mathbb{N}$ und p sei eine Primzahl.
Beweisen Sie, dass es genau ein $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq p-1$ gibt derart, dass für alle $n \in \mathbb{Z}$ die Kongruenz $n^q \equiv n^k \pmod p$ gilt. (3 Punkte)
Hinweis: Vergleichen Sie mit den Übungsaufgaben 26 und 27.

32. Beweisen Sie: Ist $1 < q \in \mathbb{N}$, so existiert eine größte natürliche Zahl m derart, dass für alle $n \in \mathbb{Z}$ die Kongruenz $n^q \equiv n \pmod m$ gilt.
Und zwar ist m das Produkt aller verschiedenen Primzahlen p mit der Eigenschaft, dass $p-1$ ein Teiler von $q-1$ ist.
Hinweis: Beachten Sie, dass für alle Primzahlen p Primitivwurzeln modulo p existieren.
(4 Punkte)

33. Bestimmen Sie die größte natürliche Zahl, welche alle Zahlen $n^q - n$ mit beliebigem $n \in \mathbb{Z}$ teilt, für $q = 97$ und $q = 211$.
(2 Punkte)

Die Übungsaufgaben 30, 31, 32 und 33 sind schriftlich zu bearbeiten und in der Vorlesungspause am Dienstag, dem 8. Juni 2010, abzugeben.