Übungen zur Kursvorlesung Elementare Zahlentheorie

Wintersemester 2006/07 — Blatt 2

W.Knapp — Tübingen, den 4. Oktober 2006

5. Berechnen Sie $\mathrm{ggT}(a,b)$ nach dem Algorithmus von Satz (1.12) der Vorlesung für die beiden Fälle
   - $a = 391, b = 595$,
   - $a = -143, b = 561$.

   Dokumentieren Sie dabei die einzelnen Schritte sorgfältig. (4 Punkte)

Die Fibonacci-Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist rekursiv definiert via

$$f_0 := 0, f_1 := 1 \text{ und } f_{n+1} := f_n + f_{n-1} \text{ für } 1 \le n \in \mathbb{N}.$$

6. Setze $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dann lässt sich die Rekursionsformel für die Fibonacci-Folge mit $1 \le n \in \mathbb{N}$ schreiben als

$$\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix}.$$

(a) Beweisen Sie, dass für $1 \le n \in \mathbb{N}$ stets $A^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$ und

$$\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ gilt.}$$

(b) Beweisen Sie, dass für $1 \le n \in \mathbb{N}$ die beiden Rekursionsformeln

$$f_{2n-1} = f_n^2 + f_{n-1}^2, \; f_{2n} = f_n^2 + 2f_n f_{n-1}$$

gelten. Welchen Vorteil bieten diese im Vergleich zur Definitionsformel?

(c) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von A und zeigen Sie, dass die Vektoren $v_1 := \begin{pmatrix} \phi \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 1-\phi \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\phi := \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ eine Basis des Spaltenraums $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren on A bilden.

(d) Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - (-1)^n \phi^{-n}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - (1-\phi)^n)$$

gilt.

(e) Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Fibonacci-Zahl f_n genau die der reellen Zahl $\frac{1}{\sqrt{5}}\phi^n$ nächstliegende ganzrationale Zahl ist. (8 Punkte)

7. Stellen Sie den Verlauf des Algorithmus nach Satz (1.12) zur Berechnung von $\mathrm{ggT}(f_{n+2}, f_{n+1})$ dar ($n \in \mathbb{N}$). Was ist das Ergebnis? Wie ist der Aufwand zu beurteilen?

Die Übungsaufgaben 5 und 6 sind schriftlich zu bearbeiten und vor der Vorlesung am Dienstag, dem 31. 10. 2006, abzugeben.