W.Knapp Tübingen, den 23. Oktober 2006

8. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen. Beweisen Sie:
   (a) Für $n \in \mathbb{N}$ und $1 \leq k \in \mathbb{N}$ gilt $f_{n+k} = f_k f_{n+1} + f_{k-1} f_n$.
   (b) Ist die natürliche Zahl m ein Teiler der natürlichen Zahl n, so ist f_m ein Teiler von f_n.
   (c) Gilt für $m, n \in \mathbb{N}$ die Beziehung $m > n$, so ist $\mathrm{ggT}(f_m, f_n) = \mathrm{ggT}(f_{m-n}, f_n)$.
   (d) Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt $\mathrm{ggT}(f_m, f_n) = f_{\mathrm{ggT}(m,n)}$.

   (8 Punkte)

   Hinweis: Für den Beweis von (b) können Sie (a) verwenden. Für den Beweis von (c) können Sie (a) verwenden. Für den Beweis von (d) können Sie (c) verwenden.

9. Seien $a, b \in \mathbb{Z}$.
   (a) Zeigen Sie: a und b sind teilerfremd genau dann, wenn Zahlen $u, v \in \mathbb{Z}$ existieren derart, dass $au + bv = 1$ gilt.
   (b) Kann man aus der Gleichung $au + bv = d$ für ein $d \in \mathbb{N}$ und geeigneten $u, v \in \mathbb{Z}$ schließen, dass $d = \mathrm{ggT}(a, b)$ gilt?

10. Bestimmen Sie mit dem Algorithmus von Satz (1.13) der Vorlesung Zahlen $u, v \in \mathbb{Z}$ derart, dass für $d := \mathrm{ggT}(315, -696)$ die Gleichung $315u - 696v = d$ gilt.

    (4 Punkte)

11. Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Man kann (etwa mit dem Algorithmus von Satz (1.13) der Vorlesung) Zahlen $u_0, v_0 \in \mathbb{Z}$ berechnen derart, dass $d := \mathrm{ggT}(a, b) = u_0 a + v_0 b$ gilt.
    Bestimmen Sie davon ausgehend die Gesamtheit aller Zahlen $u, v \in \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft $d = ua + vb$. Wieviele solche Zahlenpaare gibt es? (4 Punkte)
    Hinweis: Es wird empfohlen, zuerst den Fall $d = 1$ zu betrachten und dann den allgemeinen Fall zu erschließen.

Die Übungsaufgaben 8 und eine der Aufgaben 10 oder 11 sind schriftlich zu bearbeiten und vor der Vorlesung am Dienstag, dem 7. November 2006, abzugeben.