Übungen zur Kursvorlesung Elementare Zahlentheorie

Wintersemester 2006/07 — Blatt 4

W.Knapp — Tübingen, den 23. Oktober 2006

12. Bestimmen Sie alle zu 21 teilerfremden Reste $r \in \{0, 1, \ldots, 20\}$ und berechnen Sie jeweils die Inversen $\overline{r}^{-1} = (r + 21\mathbb{Z})^{-1}$ modulo 21. (4 Punkte)

13. Bestimmen Sie ein $x \in \mathbb{Z}$ derart, dass alle drei Kongruenzbedingungen $x \equiv 1 \pmod 5$, $x \equiv 2 \pmod 7$, $x \equiv 3 \pmod{11}$ gelten.
    Wieviele solche Zahlen $x \in \mathbb{Z}$ gibt es mit der Eigenschaft $-1000 \leq x \leq 1000$?
    (4 Punkte)

14. Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ gegeben.
    (a) Zeigen Sie: Es gibt genau ein $v \in \mathbb{N}$ derart, dass $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = v\mathbb{Z}$ gilt.
    Wir schreiben $v = \mathrm{kgV}(a, b)$ und bezeichnen v als das *kleinste gemeinsame Vielfache* von a und b.
    Warum ist diese Bezeichnung gerechtfertigt?
    (b) Beweisen Sie: Ist $d = \mathrm{ggT}(a, b)$ und $v = \mathrm{kgV}(a, b)$, so gilt die Beziehung $vd = |ab|$.

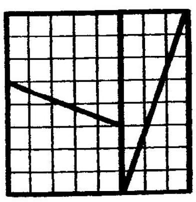
15. Erklären Sie den Sachverhalt, dass sich eine rechteckige Restetafel zu $n = n_1 n_2$ (beim Start in 0) durch Fortschreiten um 1 $(\mathrm{mod}\, n_k)$ jeweils in beiden positiven Richtungen genau dann vollständig auffüllen lässt, wenn $\mathrm{ggT}(n_1, n_2) = 1$ gilt.
    Kommt es dabei auf den Startpunkt an?

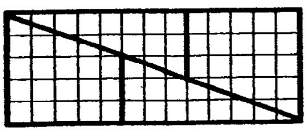
16. Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen.
    Beweisen Sie die sogenannte *Identität von Cassini* [1680]:

$$f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n \quad \text{für } 0 < n \in \mathbb{N}.$$

(4 Punkte)

Cassinis Identität ist die Grundlage einer geometrischen „Paradoxie“ , ein bei Lewis Caroll beliebtes „Rätsel“: Man zerschneide ein 8×8 *- Schachbrett in* 4 *Teile und füge es dann zu einem* 5×13*-Rechteck wie in der Zeichnung angegeben wieder zusammen:*





Die Übungsaufgaben 12, 13 und 16 sind schriftlich zu bearbeiten und vor der Vorlesung am Dienstag, dem 14. November 2006, abzugeben.