Übungen zur Kursvorlesung Elementare Zahlentheorie

Wintersemester 2006/07 Blatt 6

W.Knapp Tübingen, den 9. November 2006

21. Beweisen Sie: Ist $m > 4$ keine Primzahl, so gilt $(m-1)! \equiv 0 \pmod{m}$.

22. Sei p eine ungerade Zahl mit $p \geq 3$. Beweisen Sie:
    p ist genau dann eine Primzahl, wenn
    $$((\frac{p-1}{2})!)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p}$$
    gilt. (3 Punkte)

23. Sei eine Primzahl p gegeben. Beweisen Sie:
    Dann gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$ und alle $(a_k)_{0 \leq k \leq m} \in \mathbb{N}^{m+1}$ mit $m \in \mathbb{N}$ die Kongruenz
    $$n^{\sum_{k=0}^{m} a_k p^k} \equiv n^{\sum_{k=0}^{m} a_k} \pmod{p}.$$
    (3 Punkte)

24. Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt
    $$4501770 \mid n^{97} - n.$$
    (3 Punkte)

25. Bestimmen Sie alle Primitivwurzeln modulo p in der Menge der Reste $\{1, \ldots, p-1\}$ für alle Primzahlen $p < 20$.
    Lässt sich vielleicht eine Regel zur Anzahl dieser Primitivwurzeln modulo p beobachten?

26. Für natürliche Zahlen $k \geq 1$ setze $E_k := \frac{10^k - 1}{9} = \sum_{\ell=0}^{k-1} 10^\ell$ („Rep-Unit" der Länge k im Dezimalsystem).
    Beweisen Sie: Für alle Primzahlen $p \in \mathbb{P} \setminus \{2, 5\}$ gibt es unendlich viele Zahlen k mit der Eigenschaft $E_k \equiv 0 \pmod{p}$.
    Warum kann dies nicht für $p \in \{2, 5\}$ gelten? (3 Punkte)

Die Übungsaufgaben 22, 23, 24 und 26 sind schriftlich zu bearbeiten und vor der Vorlesung am Dienstag, dem 28. November 2006, abzugeben.