ÜBUNGEN ZUR KURSVORLESUNG ELEMENTARE ZAHLENTHEORIE

Wintersemester 2006/07 — Blatt 9

W.Knapp — Tübingen, den 5. Januar 2007

33. Wir definieren die Folge natürlicher Zahlen $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch
$$q_0 := 1 \quad \text{und} \quad q_{n+1} := \prod_{i=0}^{n} q_i + 4 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$
Beweisen Sie, dass die q_n paarweise teilerfremd sind und dass für $n \geq 1$ die Rekursionsformel $q_{n+1} = (q_n - 2)^2$ gilt.
Wie ergibt sich hieraus ein weiterer Beweis für die Unendlichkeit der Primzahlmenge? Lassen sich Vermutungen über die Primteiler von q_n aufstellen?
(3 Punkte)

34. Bestimmen Sie alle natürlichen Zahlen n, für welche der Wert der Eulerschen Phi-Funktion $\varphi(n)$ eine Primzahlpotenz p^m ist.

35. Sei p eine ungerade Primzahl und $1 \leq m \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie durch vollständige Induktion nach m, dass Folgendes gilt:
$$(1+p)^{p^{m-1}} \begin{cases} \equiv 1 & \pmod{p^m} \quad , \\ \not\equiv 1 & \pmod{p^{m+1}} \quad . \end{cases}$$
Ist dies auch für $p = 2$ richtig? (3 Punkte)

Im Folgenden schreiben wir $\mathrm{Pr}(n) := (\mathbb{Z}/n)^*$ für die Prime-Restklassen-Gruppe zum Modul $1 \leq n \in \mathbb{N}$.

36. Sei p eine ungerade Primzahl und $1 \leq m \in \mathbb{N}$.

(a) Beweisen Sie, dass $\mathrm{Pr}(p^m)$ zyklisch ist.
Hinweis: Behandeln Sie zuerst den Fall $m = 1$ und zeigen Sie dann, dass die Restklasse $1 + p + p^m\mathbb{Z}$ die Ordnung p^{m-1} in $\mathrm{Pr}(p^m)$ besitzt (mit Übungsaufgabe 35) und deshalb den Kern des natürlichen Epimorphismus $\mathrm{Pr}(p^m) \to \mathrm{Pr}(p) = \mathbb{F}_p{}^\bullet : x + p^m\mathbb{Z} \mapsto x + p\mathbb{Z}$ erzeugt.
Betrachten Sie dann eine geeignete Restklasse $a^{p^\ell}(1+p) + p^m\mathbb{Z}$, wobei a eine Primitivwurzel modulo p und ℓ eine natürliche Zahl $\leq m-1$ ist.

(b) Beweisen Sie, dass $\mathrm{Pr}(2) \cong \{1\} \cong Z_1$ und $\mathrm{Pr}(4) = \langle 3+4\mathbb{Z}\rangle \cong Z_2$ gilt, hingegen für $3 \leq m \in \mathbb{N}$ die Isomorphie $\mathrm{Pr}(2^m) \cong Z_2 \times Z_{2^{m-2}}$ vorliegt, die Prime-Restklassen-Gruppe also nicht zyklisch ist.
Hinweis: Zeigen Sie, dass für $m \geq 3$ der Kern C des natürlichen Epimorphismus $\mathrm{Pr}(2^m) \to \mathrm{Pr}(4)$ von der Restklasse $5 + 2^m\mathbb{Z}$ erzeugt wird und dass $-1 + 2^m\mathbb{Z} \notin C$ gilt.

(c) Bestimmen Sie alle positiven natürlichen Zahlen n, für welche die Prime-Restklassen-Gruppe $\mathrm{Pr}(n)$ zyklisch ist. (6 Punkte)

Die Übungsaufgaben 33, 35 und 36 sind schriftlich zu bearbeiten und vor der Vorlesung am Dienstag, dem 9. Januar 2007 , abzugeben.