Übungen zur Kursvorlesung Elementare Zahlentheorie

Wintersemester 2006/07 Blatt 11

W.Knapp Tübingen, den 3. Januar 2007

40. Gelte $n = n_1 n_2$ für zwei teilerfremde ungerade Zahlen n_1 und n_2 ungleich 1. Beweisen Sie, dass die prime Restklassengruppe $\mathrm{Pr}(n) = (\mathbb{Z}/n)^*$ mindestens 3 verschiedene Involutionen besitzt, eine davon ist $\overline{n-1} = -1 + n\mathbb{Z}$.
Zeigen Sie durch Beispiele, dass die Voraussetzung der Teilerfremdheit von n_1 und n_2 unentbehrlich ist für die Gültigkeit der Behauptung.

(3 Punkte)

41. Bestimmen Sie die Anzahlen der Fermat-Testmengen FT(33) und FT(51).
Dabei ist für $2 \le n \in \mathbb{N}$ definiert
$\mathrm{FT}(n) = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ und } x < n \text{ und } x^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}\}$
nach (5.1) der Vorlesung.

(3 Punkte)

42. Die kleinste Carmichael-Zahl ist $561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$.
Bestimmen Sie die Anzahl der Euler-Testmenge ET(561).
Dabei ist nach (5.12) der Vorlesung für eine ungerade natürliche Zahl $n > 1$ definiert
$\mathrm{ET}(n) = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < n, \mathrm{ggT}(x, n) = 1 \text{ und } x^{\frac{n-1}{2}} \equiv \left(\frac{x}{n}\right) \pmod{n}\}$.

(6 Punkte)

Die Übungsaufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und vor der Vorlesung am Dienstag, dem 23. Januar 2007, abzugeben.