Übungen zur Vorlesung
Mathematik III für Informatiker und Bioinformatiker

Wintersemester 2008/09 — Blatt 1

W.Knapp — Tübingen, den 15. September 2008

1. (i) Beweisen Sie, dass in den folgenden Fällen jeweils Unterräume von Vektorräumen vorliegen: $B(X,\mathbb{R}) \leq \mathbb{R}^X$, $\mathcal{C}^k(J) \leq \mathbb{R}^J$, $\mathcal{C}^\infty \leq \mathbb{R}^J$,
$$\mathbb{K}^{\langle\mathbb{N}\rangle} = \{u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : u \text{ konvergent }\} \leq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}.$$
Dabei sei X eine beliebige Menge, J ein nichtleeres offenes reelles Intervall und $\mathbb{K}$ der Körper der reellen oder der komplexen Zahlen.
(ii) Sei K ein beliebiger Körper und V und W seien K-Vektorräume. Zeigen Sie, dass $W^V = \mathrm{Abb}(V,W)$ in natürlicher Weise ein K-Vektorraum ist. (Addition von Abbildungen und Multiplikation mit Skalaren sind in geeigneter Weise zu definieren.)
Beweisen Sie dann, dass $\mathcal{L}(V,W) = \mathrm{Hom}\,(V,W) := \{f \in W^V : f \text{ ist } K\text{-linear }\}$ ein Unterraum von W^V ist.

2. Sei V ein beliebiger K-Vektorraum und seien $x, y \in V$. Beweisen Sie, dass $\langle x\rangle_K = Kx := \{rx : r \in K\}$ und $\langle x,y\rangle_K := \langle\{x,y\}\rangle_K = Kx + Ky := \{rx + sy : r,s \in K\}$ gilt.

3. Sei K ein beliebiger Körper und $n \in \mathbb{N}_0$. Beweisen Sie, dass $B = \{e_k : 1 \leq k \leq n\}$ mit $e_k = (\delta_{kj})_{1\leq j\leq n}$ eine Basis von K^n ist.

4. Für $k \in \mathbb{N}_0$ setze $A_k := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.
Berechnen Sie eine Formel für die Linearkombination $\sum_{k=0}^{m} kA_k$ für beliebiges $m \in \mathbb{N}_0$. (5 Punkte)

5. Beweisen Sie den Satz (1.10) der Vorlesung:
Ist V ein K-Vektorraum und $B \subseteq V$, so sind folgende Aussagen gleichwertig:
(a) B ist eine Basis von V.
(b) B ist maximal linear unabhängig in V.
(c) B ist minimal aufspannend in V. (10 Punkte)

6. Sei $f \in \mathrm{Hom}\,(V,W)$. Beweisen Sie, dass $\mathrm{Ker}\,(f) \leq V$ und $\mathrm{Im}\,(f) \leq W$ gilt.

7. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{Q}^{\langle\mathbb{N}\rangle}$ aller Cauchy-Folgen mit Werten in $\mathbb{Q}$ ein Unterraum von $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ bildet und dass die Abbildung $\ell : \mathbb{Q}^{\langle\mathbb{N}\rangle} \to \mathbb{R} : (a_n) \mapsto \lim_{n\to\infty} a_n$ ein Epimorphismus (*surjektive* $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung) ist. Was ist $\mathrm{Ker}\,(\ell)$? (5 Punkte)

8. Sei B eine lineare unabhängige Teilmenge eines K-Vektorrums V und $f : V \to W$ ein Monomorphismus (*injektive* K-lineare Abbildung).
Beweisen Sie, dass $f(B) := \{f(b) : b \in B\}$ linear unabhängig in W ist.

Die Übungsaufgaben 4, 5 und 7 sind schriftlich zu bearbeiten und am Mittwoch, dem 22. Oktober 2008, in der Vorlesungspause abzugeben.