

W.Knapp

Tübingen, den 20. Oktober 2008

9. Sind V und W K -Vektorräume, so wird das cartesische Produkt $V \times W$ zu einem K -Vektorraum via
- $$(x, y) + (x', y') := (x + x', y + y'), \quad r(x, y) := (rx, ry)$$
- für alle $x, x' \in V, y, y' \in W, r \in K$; diesen K -Vektorraum bezeichnen wir ebenfalls mit $V \times W$. Beweisen Sie dies und zeigen Sie darüberhinaus, dass $V \times W = V_1 \oplus W_1$ gilt, wobei $V \cong V_1$ und $W \cong W_1$ gilt.
10. Sei $V = \mathbb{R}^4$ und $B = \{e_j : 1 \leq j \leq 4\}$ die kanonische Basis von V mit $e_j = (\delta_{kj})_{1 \leq k \leq 4}$. Weiter sei $B_0 := \{(1, 1, -1, 1), (0, 1, 0, -1)\}$.
- (a) Bestimmen Sie $\text{supp}_B(x)$ für alle $x \in B_0$.
 - (b) Zeigen Sie, dass B_0 linear unabhängig ist und bestimmen Sie eine Basis C von V mit $B_0 \subseteq C$ und $C \setminus B_0 \subseteq B$. (6 Punkte)
11. Beweisen Sie Satz (1.26) der Vorlesung: Sei M eine Teilmenge des K -Vektorraums V der endlichen Dimension $n \geq 1$. Dann gilt:
- (1) Wenn $|M| \geq n + 1$, so ist M linear abhängig.
 - (2) Wenn $|M| \leq n - 1$, so ist $\langle M \rangle_K \neq V$.
 - (3) Wenn $|M| = n$ und M linear unabhängig ist, so ist M eine Basis von V .
 - (4) Wenn $|M| = n$ und $\langle M \rangle_K = V$ gilt, so ist M eine Basis von V . (8 Punkte)
12. Beweisen Sie Satz (1.28) der Vorlesung für $\dim(V) = \infty$.
13. Beweisen Sie Satz (1.31) der Vorlesung:
Das innere Produkt $\beta : K^n \times K^n \rightarrow K : (x, y) \mapsto \beta(x, y) := (x | y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ ist eine symmetrische Bilinearform.
14. Sei $V := \{f \in \mathbb{R}[X] : \text{Grad}(f) \leq 5\}$ der $\mathbb{R}$ -Vektorraum der Polynomfunktionen vom Grad ≤ 3 mit geordneter Basis $b = (1, X, X^2, X^3)$; wir identifizieren dabei das Polynom $\sum_{k=0}^3 a_k X^k$ mit der Polynomfunktion $t \mapsto \sum_{k=0}^3 a_k t^k$.
 $d : V \rightarrow V : f \mapsto f'$ ist dann ein Endomorphismus von V .
- (i) Bestimmen Sie die Koordinatenmatrix $A = \kappa_b(d) = \kappa_{b,b}(d)$.
 - (ii) Bestimmen Sie $\text{Ker}(d)$, $\text{Im}(d)$ und die Dimensionen dieser Unterräume. Gilt $\text{Ker}(d) \subseteq \text{Im}(d)$?
 - (iii) Bestimmen Sie einen Unterraum $U \leq V$ mit der Eigenschaft $V = U \oplus \text{Im}(d)$. (6 Punkte)

Die Übungsaufgaben 10, 11 und 14 sind schriftlich zu bearbeiten und am Mittwoch, dem 29. Oktober 2008, in der Vorlesungspause abzugeben.