W.Knapp

Tübingen, den 29. Oktober 2008

Im Folgenden bezeichne K einen Körper, V einen K -Vektorraum und es seien $n, m \in \mathbb{N}$.

15. Sei $\pi \in \text{End}(V)$ und gelte $\pi^2 = \pi \circ \pi = \pi$.
Beweisen Sie, dass dann $V = \text{Ker}(\pi) \oplus \text{Im}(\pi)$ gilt.
(Ein solcher Endomorphismus heißt ein *Projektionsoperator*.)
16. Gelte $V = U \oplus W$ und $\dim(V) = n$. Dann existiert eine geordnete Basis $b = (b_1, \dots, b_n)$ von V derart, dass mit $\dim(U) = r$ das Anfangsstück $b_U := (b_1, \dots, b_r)$ eine geordnete Basis von U und $b_W := (b_{r+1}, \dots, b_n)$ eine geordnete Basis von W ist.
Zeigen Sie, dass genau ein Endomorphismus $\pi \in \text{End}(V)$ existiert mit den Eigenschaften $\pi(x) = x$ für alle $x \in U$ und $\pi(x) = 0$ für alle $x \in W$. Bestimmen Sie die Koordinatenmatrix $P = \kappa_b(\pi) = \kappa_{b,b}(\pi)$. Zeigen Sie, dass $\pi^2 = \pi$ gilt und bestimmen Sie $\text{Ker}(\pi)$ und $\text{Im}(\pi)$. (5 Punkte)
17. Sei $A = (111 \dots 1) \in K^{1 \times n}$ und es sei $b \in K = K^1$. Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in K^n$ des linearen Gleichungssystems (der linearen Gleichung) $Ax = b$ und eine Basis für den Lösungsraum $L(A, 0)$ des zugehörigen homogenen Gleichungssystems. (5 Punkte)
18. Seien $A \in K^{m \times n}$ und $b \in K^m$ gegeben. Dann bezeichnet $\ell_A : K^n \rightarrow K^m : x \mapsto Ax$ die Linksmultiplikation von A mit dem Spaltenvektor x ; für $j \in \{1, \dots, n\}$ bezeichne $a_{.j} = (a_{kj})_{1 \leq k \leq m}$ die j -Spalte von A .
Beweisen Sie die Gleichwertigkeit folgender Aussagen:
(a) Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ ist lösbar.
(b) $b \in \text{Im}(\ell_A)$.
(c) $b \in \langle a_{.j} : 1 \leq j \leq n \rangle_K$. (4 Punkte)
19. Die Abbildung $\delta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$
ist nach der Vorlesung eine Bilinearform.
(i) Beweisen Sie, dass δ schiefsymmetrisch ist, d.h. es gilt $\delta(x, y) = -\delta(y, x)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$.
(ii) Zeigen Sie, dass $b = (e_1 + e_2, e_1 - e_2)$ eine geordnete Basis von $\mathbb{R}^2$ ist und berechnen Sie die Gram-Matrix G_δ^b . (6 Punkte)
20. Beweisen Sie dass die Abbildung $\gamma : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} y$
ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ ist. Geben Sie für γ einen expliziten Formel­ausdruck an.

Die Übungsaufgaben 16, 17, 18 und 19 sind schriftlich zu bearbeiten und am Mittwoch, dem 5. November 2008 in der Vorlesungspause abzugeben.