Übungen zur Vorlesung
Mathematik III für Informatiker und Bioinformatiker

Wintersemester 2008/09 Blatt 5

W.Knapp Tübingen, den 5. November 2008

26. Es bezeichne V den $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome (= Polynomfunktionen) vom Grad ≤ 3 mit geordneter Basis (f_0, f_1, f_2, f_3), wobei $f_k : t \mapsto t^k$ zu verstehen ist. Zeigen Sie, dass durch $\beta(f,g) := \int_0^1 f(t)g(t)dt$ ein Skalarprodukt auf V definiert ist und berechnen Sie eine Orthonormalbasis von (V, β). (6 Punkte)

27. Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln für Homomorphismen und Matrizen:
    (1) Seien U, V, W K-Vektorräume und seien $f, f_1, f_2 \in \mathcal{L}(U,V)$, $g, g_1, g_2 \in \mathcal{L}(V,W)$ und $r \in K$. Dann gilt:
    (i) $g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2$,
    (ii) $(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f$,
    (iii) $\mathrm{id}_V \circ f = f$ und $f \circ \mathrm{id}_U = f$,
    (iv) $r(g \circ f) = (rg) \circ f = g \circ (rf)$.
    (2) Seien $A, A_1, A_2 \in K^{m \times n}$ und $B, B_1, B_2 \in K^{n \times p}$ mit $m, n, p \in \mathbb{N}$, weiter sei $r \in K$. Dann gilt:
    (i) $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$,
    (ii) $(A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B$,
    (iii) $E_mA = A$ und $AE_n = A$,
    (iv) $r(AB) = (rA)B = A(rB)$. (8 Punkte)

28. Wir teilen quadratische Matrizen $Q \in K^{n \times n}$ für $1 < r < n$ in Blöcke ein:
$$Q = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$$
mit $A \in K^{r \times r}$, $B \in K^{(n-r) \times r}$, $C \in K^{r \times (n-r)}$, $D \in K^{(n-r) \times (n-r)}$.
Beweisen Sie, dass bei einer solchen Einteilung die Multiplikationsregel
$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & C' \\ B' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + CB' & AC' + CD' \\ BA' + DB' & BC' + DD' \end{pmatrix}$$
gilt. Machen Sie sich diesen Sachverhalt zuerst für $n = 4$ und $r = 2$ klar.

29. Untersuchen Sie die folgenden Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ auf Invertierbarkeit und berechnen Sie gegebenenfalls die inverse Matrix A^{-1}; dabei ist $\alpha \in \mathbb{R}$.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$
(6 Punkte)

Die Übungsaufgaben 26, 27 und 29 sind schriftlich zu bearbeiten und am Mittwoch, dem 19. November 2008, im Zimmer C 6A02 des Mathematischen Instituts zwischen 11 Uhr und 12 Uhr abzugeben.