Übungen zur Vorlesung
Mathematik III für Informatiker und Bioinformatiker

Wintersemester 2008/09 — Blatt 6

W.Knapp — Tübingen, den 11. November 2008

30. Sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie:
    $A \in \mathrm{GL}(n, K)$ gilt genau dann, wenn $\mathrm{rg}(A) = n$ ist.
    Hinweis: Betrachten Sie die lineare Abbildung $\ell_A : K^n \to K^n : x \mapsto Ax$.

31. Sei K ein endlicher Körper mit $|K| = q$ Elementen und sei V ein K-Vektorraum der endlichen Dimension $m \geq 1$. Beweisen Sie:
    (i) $|V| = q^m$.
    (ii) V besitzt genau $\frac{q^m-1}{q-1}$ verschiedene Unterräume der Dimension 1. (4 Punkte)

32. Sei K ein endlicher Körper mit $|K| = q$ Elementen und sei $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass $|\mathrm{GL}(n, K)| = \prod_{k=0}^{n-1}(q^n - q^k) = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k=1}^{n}(q^k - 1)$ gilt.
    Hinweis: Bauen Sie die Matrizen $A \in \mathrm{GL}(n, K)$ spaltenweise auf unter Beachtung der Resultate der Übungsaufgaben 30 und 31.

33. Bestimmen Sie explizit alle Elemente von $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_2)$ für den Körper $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Begründen Sie die Vollständigkeit Ihrer Ergebnisliste. (4 Punkte)

34. Setze $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Geben Sie Basen für den Spaltenraum $\mathrm{SR}(A)$ und den Zeilenraum $\mathrm{ZR}(A)$ von A an. Bestimmen Sie die Rang-Normalform $E_{r,3\times 3}$ von A und Matrizen $S, T \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ derart, dass $SAT = E_{r,3\times 3}$ gilt. (6 Punkte)
    Hinweis: Folgen Sie dem Beweis von (3.31) der Vorlesung.

35. Sei der euklidische Raum $(V, \beta) = (\mathbb{R}^3, (\cdot \mid \cdot))$ gegeben, $b = (e_1, e_2, e_3)$ die kanonische geordnete Basis von V. Dann ist b eine Ortonormalbasis.
    (i) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $c = (c_1, c_2, c_3)$ von (V, β) mit $c_1 := \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$ und die Matrix $W_{b,c}$ des Basiswechsels von b zu c.
    (ii) Zeigen Sie, dass $W_{c,b} = W_{b,c}^{-1} = W_{b,c}^t$ gilt.
    (iii) Wie lässt sich das Resultat von (ii) auf beliebige euklidische Vektorräume endlicher Dimension verallgemeinern? (6 Punkte)
    Anmerkung: Matrizen $A \in K^{n\times n}$ mit der Eigenschaft $AA^t = A^tA = E_n$ nennt man *orthogonale* Matrizen.

Die Übungsaufgaben 31, 33, 34 und 35 sind schriftlich zu bearbeiten und am Mittwoch, dem 26. November 2008, in der Vorlesungspause abzugeben.