W.Knapp Tübingen, den 26. November 2008

36. Erstellen Sie eine Liste aller Elementarmatrizen der Art $T_{jk}(-1), D_j(-1), P_{jk} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.
    Die Vollständigkeit der Liste ist zu begründen. (4 Punkte)

37. Zeigen Sie, dass $P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$ ein Produkt von 4 Elementarmatrizen der Art $T_{jk}(\varepsilon), D_j(-1)$ mit $\varepsilon \in \{1, -1\}$ ist.
    Wie und warum lässt sich dieser Sachverhalt auf beliebige Transpositionsmatrizen $P_{jk} \in K^{n\times n}$ übertragen?
    Was bedeutet dieser Sachverhalt für die Umformung von Matrizen durch Zeilentransformationen im Sinne von Satz (4.5) der Vorlesung? (8 Punkte)

38. (*Zusammensetzen von Matrizen und Orthogonalität in* $(K^n, (\cdot \mid \cdot))$)
    Sei K ein beliebiger Körper und $m, n, r, \ell, n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{N}$.
    Wenn $A = (a_{jk}) \in K^{m\times n_1}$ und $B = (b_{jk}) \in K^{m\times n_2}$ gilt, so wird die *Nebeneinandersetzung* $(A \mid B) = (c_{jk}) \in K^{m\times(n_1+n_2)}$ definiert durch

$$c_{jk} := \begin{cases} a_{jk} & \text{, falls } k \leq n_1, \\ b_{j,k-n_1} & \text{, falls } k > n_1 \end{cases} .$$

    Wenn $A = (a_{jk}) \in K^{m_1\times n}$ und $B = (b_{jk}) \in K^{m_2\times n}$ gilt, so wird die *Übereinandersetzung* $\left(\frac{A}{B}\right) = (d_{jk}) \in K^{(m_1+m_2)\times n}$ definiert durch

$$d_{jk} := \begin{cases} a_{jk} & \text{, falls } j \leq m_1, \\ b_{j-m_1,k} & \text{, falls } j > m_1 \end{cases} .$$

    (i) Nun sei $0 < r < n$ und es seien
        $A \in K^{m\times r}, B \in K^{m\times(n-r)}, C \in K^{r\times \ell}, D \in K^{(n-r)\times \ell}$.
        Beweisen Sie, dass
        $(A \mid B)\left(\frac{C}{D}\right) = AC + BD \in K^{m\times \ell}$ gilt.
    (ii) Nun sei $0 < r < n$ und es sei $A \in K^{r\times(n-r)}$. Beweisen Sie, dass $(E_r \mid A)\left(\frac{-A}{E_{n-r}}\right) = 0 \in K^{r\times(n-r)}$ gilt. Wie lässt sich dies als Orthogonalitätsaussage in $(K^n, (\cdot \mid \cdot))$ interpretieren?

    (8 Punkte)

Die Übungsaufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und am Mittwoch, dem 3. Dezember 2008, in der Vorlesungspause abzugeben.