

W.Knapp

Tübingen, den 23. November 2008

39. Stellen Sie die Permutation  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 5 & 1 & 4 & 9 & 8 & 6 & 2 \end{pmatrix} \in \text{Sym}_9$  als (Kompositions-)Produkt von Transpositionen dar. Was ist  $\text{sgn}(\sigma)$ ? Ist die Zahl der Fehlstände von  $\sigma$  ungerade? Geben Sie 3 verschiedene Fehlstände von  $\sigma$  explizit an. (5 Punkte)

40. Formen Sie die Matrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4 \times 6}$  nach dem Gauß-  
verfahren in eine Matrix der Gestalt  $LA = D = \begin{pmatrix} E_r & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  mit  $r = \text{rg}(A)$  und  
 $B \in \mathbb{Q}^{r \times (6-r)}$  um. Warum ist hier die Rechtsmultiplikation mit einer Permutati-  
onsmatrix  $P_\sigma$  entbehrlich? (6 Punkte)

41. Prüfen Sie, ob  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{GL}(3, \mathbb{Q})$  gilt und berechnen Sie gegebenenfalls  
die inverse Matrix  $A^{-1}$ . (5 Punkte)

42. Sei  $K$  ein Körper. Wenn es kein  $m \in \mathbb{N}$  gibt derart, dass  $m \cdot 1 = 0$  in  $K$  gilt, so  
sagt man :  $K$  hat die *Charakteristik* 0 und schreibt  $\text{char}(K) = 0$ .  
Beweisen Sie, dass andernfalls die kleinste natürliche Zahl  $m$  mit der Eigenschaft  
 $m \cdot 1 = 0$  eine Primzahl  $p$  ist. (Man versteht dann unter der *Charakteristik* von  
 $K$  die Primzahl  $p$  und schreibt dafür  $\text{char}(K) = p$ .)  
Zeigen Sie, dass  $K_0 = \{m \cdot 1 : m \in \mathbb{Z}\}$  der *Primkörper* von  $K$  ist, d.h. der  
Durchschnitt aller Teilkörper von  $K$ , und dass  $K_0$  zu  $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  isomorph ist.

43. Beweisen Sie: Wenn  $K$  ein endlicher Körper ist mit  $|K| = q$ , so gilt  $q = p^f$  mit  
 $p = \text{char}(K)$  und  $f = \dim_{K_0}(K)$ . (4 Punkte)  
*Hinweis:*  $K$  ist auf natürliche Weise ein Vektorraum über dem Primkörper  $K_0$ .

Die Übungsaufgaben 39, 40, 41 und 43 sind schriftlich zu bearbeiten und am  
Mittwoch, dem 10. Dezember 2008, in der Vorlesungspause abzugeben.