

W.Knapp

Tübingen, den 28. November 2008

44. Sei  $K = \{a_1 = 0, a_2, \dots, a_q\}$  ein endlicher Körper mit  $|K| = q$ . Zeigen Sie, dass dann im Polynomring  $K[X]$  gilt  $X^q - X = X(X^{q-1} - 1) = \prod_{k=1}^q (X - a_k)$ . Insbesondere gilt  $a^q = a$  für alle  $a \in K$  und  $a^{q-1} = 1$  für alle  $a \in K \setminus \{0\}$ .

*Hinweis:* Zeigen Sie, dass  $a_\ell^{q-1} \prod_{k=2}^q a_k = \prod_{k=2}^q a_k$  für alle  $2 \leq \ell \leq q$  gilt.

45. Bestimmen Sie die Lösungsmenge  $L(A, b) \leq \mathbb{Q}^5$  des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Was ist  $\dim L(A, b)$ ?

(6 Punkte)

46. Wir betrachten den Hamming-Code  $C \leq \mathbb{F}_2^7$  mit der Kontrollmatrix

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie durch direkte Rechnung, dass  $K_1(0)$  die Menge aller Klassenführer  $y_{x+C}$  für  $x + C \in \mathbb{F}_2^7/C$  ist. Decodieren Sie die Vektoren  $(1, 1, 1, 1, 0, 0, 0)$  und  $(0, 1, 0, 1, 0, 1, 1)$  gemäß dem Hamming-Prinzip nach  $C$ . (8 Punkte)

*Hinweis:* Beachten Sie, dass  $C = \{x \in \mathbb{F}_2^7 : Hx = 0\}$  gilt und dass deshalb für zwei Vektoren  $x, y \in \mathbb{F}_2^7$  genau dann  $x + C = y + C$  gilt, wenn  $Hx = Hy$  ist.

47. Bestimmen Sie eine  $3 \times 13$ -Hamming-Matrix  $H$  über  $\mathbb{F}_3$ . Geben Sie dann eine Generator-Matrix  $G$  für den zugehörigen Hamming-Code  $C$  mit Kontrollmatrix  $H$  an.  $C$  ist nach Vorlesung 1-perfekt, d.h. es gilt  $\mathbb{F}_3^{13} = \bigsqcup_{x \in C} K_1(x)$ . Wie kann man  $C$  dazu verwenden, um 12 Richtige im Fußball-Toto mit 13 Spielen zu garantieren? (6 Punkte)

Die Übungsaufgaben 45, 46 und 47 sind schriftlich zu bearbeiten und am Mittwoch, dem 17. Dezember 2008, in der Vorlesungspause abzugeben.