Frohe Weihnachtsfeiertage und ein gutes neues Jahr !

Übungen zur Vorlesung
Mathematik III für Informatiker und Bioinformatiker

Wintersemester 2008/09 Blatt 10

W.Knapp Tübingen, den 4. Dezember 2008

48. Berechnen Sie die Determinante der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}.$$
Berechnen Sie die inverse Matrix A^-, falls A invertierbar ist. (5 Punkte)

49. Wir betrachten den euklidischen Raum $(\mathbb{R}^3, (\cdot \mid \cdot))$. Für $x, y \in \mathbb{R}^3$ setze
$x \times y = v(x, y) := (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$
$$= (\det \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}) \in \mathbb{R}^3.$$
$x \times y = v(x, y)$ heiße das *Vektorprodukt* oder *Kreuzprodukt* von x mit y.
D bezeichne die normierte Determinantenform auf $\mathbb{R}^3$. Beweisen Sie:
   (a) Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ und alle $r \in \mathbb{R}$ gilt
   $v(x + y, z) = v(x, z) + v(y, z)$, $v(x, y + z) = v(x, y) + v(x, z)$,
   $v(rx, y) = rv(x, y) = v(x, ry)$ und $v(y, x) = -v(x, y)$.
   (b) Es gilt $v(x, y) = 0 \iff (x, y)$ ist linear abhängig.
   (c) Stets gilt $\mathbb{R}v(x, y) \leq (\mathbb{R}x + \mathbb{R}y)^\perp$; Gleichheit liegt hier genau dann vor, wenn (x, y) linear unabhängig ist. Wenn (x, y) linear unabhängig ist, ist $(x, y, x \times y)$ eine geordnete Basis von $\mathbb{R}^3$ und es ist $D(x, y, x \times y) > 0$.
   (d) Für $0 \neq x, y \in \mathbb{R}^3$ gilt $\|x \times y\| = (\|x\|^2\|y\|^2 - (x \mid y)^2)^{\frac{1}{2}} = \|x\|\,\|y\| \sin\sphericalangle(x, y)$.
   (e) Skizzieren Sie die Lage von $x \times y = v(x, y)$ für die drei Fälle
   i) $x = e_1, y = e_2$, ii) $x = e_2, y = e_1$, iii) $x = (1, 1, 1), y = (1, -1, 0)$. Was fällt hier auf? (10 Punkte)

50. Warum lässt sich die streng genommen unsinnige Formel
$$x \times y = v(x, y) = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e_1 & x_1 & y_1 \\ e_2 & x_2 & y_2 \\ e_3 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}$$
als Merkregel für die Berechnung von $x \times y = v(x, y)$ verwenden?

51. Berechnen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte der Matrix $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Ist A diagonalisierbar? Berechnen Sie gegebenfalls eine Matrix $T \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ derart, dass $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist. (5 Punkte)

Die Übungsaufgaben 48, 49 und 51 sind schriftlich zu bearbeiten und am Mittwoch, dem 7. Januar 2009, in der Vorlesungspause abzugeben.