W.Knapp

Tübingen, den 7. Januar 2009

52. Bezeichne $F := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die *Fibonacci*-Matrix.
   (i) Berechnen Sie das charakteristische Polynom p_F von F und seine Nullstellen λ_1, λ_2. Zeigen Sie, dass F diagonalisierbar ist und dass $(\mathbb{R}^2, (\cdot \mid \cdot))$ eine Orthonormalbasis (b_1, b_2) aus Eigenvektoren von F besitzt. Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix U derart, dass $U^{-1}FU = U^tFU$ eine Diagonalmatrix ist.
   (ii) Zeigen Sie, dass es genau eine beidseitig unendliche Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ gibt derart, dass $F^n = \begin{pmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{pmatrix}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt.
   (iii) Welche Rekursionformel erfüllt die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$? Wie lässt sich eine explizite Formel für die Berechnung von f_n angeben? (8 Punkte)

   Hinweis: Beachten Sie, dass $F^n\, b_k = {\lambda_k}^n\, b_k$ für $k = 1, 2$ gilt.

53. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ hat die Matrix $A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ einen reellen Eigenwert? Was ist dann die zugehörige Eigenbasis von $\ell_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto Ax$? Zeigen Sie, dass A als Matrix über $\mathbb{C}$ aufgefasst, stets diagonalisierbar ist. Was ist dann eine Eigenbasis von $\ell_A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 : x \mapsto Ax$?

54. Bestimmen Sie für die reell symmetrische Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3, (\cdot \mid \cdot))$ aus Eigenvektoren von A. (6 Punkte)

55. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie:
   (i) Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $(A^t x \mid x) = (x \mid Ax)$.
   (ii) A^tA ist eine (reell) symmetrische Matrix, deren Eigenwerte alle ≥ 0 sind.
   (iii) Wenn $A \neq 0$ gilt, so besitzt A^tA einen von 0 verschiedenen Eigenwert λ.
   (iv) $\sigma^2(A) := \max\{(Ax \mid Ax) : x \in \mathbb{R}^n \text{ und } \|x\|_2 = 1\}$ ist der größte Eigenwert von A^tA. (6 Punkte)

   Hinweis: $\sigma^2(A)$ ist das Quadrat der „Spektralnorm" von A.

Die Übungsaufgaben 52, 54 und 55 sind schriftlich zu bearbeiten und am Mittwoch, dem 14. Januar 2009, in der Vorlesungspause abzugeben.