W.Knapp Tübingen, den 19. Januar 2009

56. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\mathcal{N}$ sei die Menge aller Normen auf V. Nach der Vorlesung heißen zwei Normen $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$ äquivalent (im Zeichen $N_1 \approx N_2$) genau dann, wenn es Konstanten $0 < r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ gibt derart, dass für alle $x \in V$ stets $N_2(x) \leq r_1 N_1(x)$ und $N_1(x) \leq r_2 N_2(x)$ gilt.
Beweisen Sie, dass $\approx$ eine Äquivalenzrelation in $\mathcal{N}$ ist.

57. Für $A \in \mathbb{R}^{p\times q}$ setze $\|A\|_{22} := \max\{\|Ax\|_2 : \|x\|_2 = 1\}$.
 (i) Beweisen Sie, dass $\|\cdot\|_{22}$ eine Matrixnorm im Sinne der Vorlesung ist.
 (ii) Beweisen Sie, dass für $A \in \mathbb{R}^{p\times q}$ stets $\|A\|_{22} \leq pq\|A\|_\infty$ gilt.

(8 Punkte)

58. Führen Sie den Beweis von Satz (9.13) der Vorlesung (*Satz von Bolzano-Weierstraß*) explizit und ausführlich durch.

59. Berechnen Sie für folgende Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Werte der Matrixfunktion $\exp(A)$:
 (i) $A = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$; (ii) $A = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 1 & r \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$.

(6 Punkte)

60. Sei $X = \mathbb{R}^p$ oder $X = \mathbb{R}^{p\times q}$ und $\|\cdot\|$ bezeichne eine Norm auf X. Weiter sei $x \in X, D \subseteq X$ und $0 < r \in \mathbb{R}$.
Nach Vorlesung ist $B(x,r) = \{y \in X : \|y - x\| < r\}$ der Ball um x mit Radius r und $S(x,r) = \{y \in X : \|y - x\| = r\}$ die Sphäre um x mit Radius r.
Beweisen Sie folgende Aussagen.
 (i) $\overline{\overline{D}} = \overline{D}$. (Die abgeschlossene Hülle einer jeden Teilmenge von X ist also abgeschlossen.)
 (ii) $\overline{B(x,r)} = B(x,r) \cup S(x,r)$.
 (iii) $\overline{S(x,r)} = S(x,r)$.

(6 Punkte)

Die Übungsaufgaben 57, 59 und 60 sind schriftlich zu bearbeiten und am Mittwoch, dem 21. Januar 2009, in der Vorlesungspause abzugeben.