

W.Knapp

Tübingen, den 21. Januar 2009

61. Es bezeichne $X = \mathbb{R}^p$ oder $X = \mathbb{R}^{p \times q}$. Weiter seien (u_n) und (v_n) konvergente Folgen in X mit $\lim u_n = u$ und $\lim v_n = v$, hingegen seien (r_n) und (s_n) konvergente Folgen in $\mathbb{R}$ mit $\lim r_n = r$ und $\lim s_n = s$.
Beweisen Sie, dass dann $\lim (r_n u_n + s_n v_n) = ru + sv$ gilt. (4 Punkte)
62. Seien N_1 und N_2 zwei äquivalente Normen auf dem $\mathbb{R}$ -Vektorraum X . Setze $B_k(x, r) := \{y \in X : N_k(y - x) < r\}$ für $0 < r$ und $k = 1, 2$. Es gelte $x \in X$.
(i) Beweisen Sie:
Für jedes $\varepsilon > 0$ existieren $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ derart, dass $B_2(x, \varepsilon_2) \subseteq B_1(x, \varepsilon)$ und $B_1(x, \varepsilon_1) \subseteq B_2(x, \varepsilon)$ gilt.
(ii) Behandeln Sie den konkreten Fall $X = \mathbb{R}^2$, $x = 0$ und zeichnen Sie für $\varepsilon = 1$ die Inklusionen der Aussage von (i) mit geeigneten $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ und allen Möglichkeiten $N_k \in \{\|\cdot\|_2, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty\}$. (4 Punkte)
63. Beweisen Sie, dass jede lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ stetig ist. (4 Punkte)
64. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^x \sin(y) \\ y^2 \cos(z) \end{pmatrix}$$

stetig ist und berechnen Sie die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow (1, \frac{\pi}{2}, 0)} f(x)$. (4 Punkte)

65. Für welche der folgenden Funktionen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : x \mapsto A(x)$ bzw. $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2} : x \mapsto A(x)$ existiert der Grenzwert $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} A(x)$?
(i) $x \mapsto Ax$ für eine feste Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$,
(ii) $x \mapsto \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$,
(iii) $x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} & 2 \end{pmatrix}$,
(iv) $x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{x_1 - x_2^2} & 2 \end{pmatrix}$. (4 Punkte)

Die Übungsaufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und am Mittwoch, dem 28. Januar 2009, in der Vorlesungspause abzugeben.