

W.Knapp

Tübingen, den 27. Januar 2009

66. Sei U eine nicht leere offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und die Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ und $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ seien stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass dann die Funktion $\varphi f : U \rightarrow \mathbb{R}^p : x \mapsto \varphi(x)f(x)$ stetig differenzierbar ist und dass dabei für alle $x \in U$ gilt

$$(\varphi f)'(x) = \varphi'(x)f(x) + \varphi(x)f'(x).$$

67. Betrachten Sie die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (x^2y^3, x^4 - y^2)$ und $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto x(\cos(y), \sin(y))$.
- (i) Beweisen Sie, dass f und g stetig differenzierbar sind und berechnen Sie die Jacobi-Matrizen $f'(x, y)$ und $g'(x, y)$.
 - (ii) Sind f und g beliebig oft stetig differenzierbar?
 - (iii) Warum sind f und g beide nicht injektiv? Bestimmen Sie eine (möglichst große) nicht leere offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^2$, für welche die Einschränkung von g auf U injektiv ist.

(8 Punkte)

68. Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + ax_1x_2 + x_2^2$. Zeigen Sie, dass f beliebig oft stetig differenzierbar ist und berechnen Sie die Jacobi-Matrix $f'(x)$ und die Hesse-Matrix von f

$$H(f)(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x) \right) = (D_{jk}f(x)).$$

Für welche Werte von x gilt $f'(x) = 0$?

Was sind die Eigenwerte von $H(f)(x)$? Für welche Werte von a ist $H(f)(x)$ positiv definit?

(6 Punkte)

69. Berechnen Sie für die folgenden Funktionen jeweils die partiellen Ableitungen und prüfen Sie, wo diese stetig sind. Stellen Sie jeweils die Jacobi-Matrix auf.

- (i) $f(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$,
- (ii) $g(x, y) = \exp(x \cos(y^2))$,
- (iii) $h(x, y, z) = (x, y^2, \exp(x^2 - z^2))$.

(6 Punkte)

Die Übungsaufgaben 67, 68 und 69 sind schriftlich zu bearbeiten und am Mittwoch, dem 4. Februar 2009, in der Vorlesungspause abzugeben.