Prof. Dr. Helmut Wielandt

Tagebücher

D15

3.2.1971 – 25.3.1978

3.2.1971 - 25.3.78

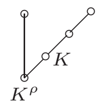
0A/0B

Lit proendliche Gruppen: Shatz 1972
DiplArbeit Friedmann (Schmid 1975) | Ann of Math Studies 67
XV

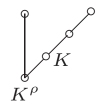
0B/1

3.2.71 : $\lhd\lhd$: Gemeinsame subnormale Ugr.

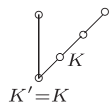
V: Stets sei gegeben $A, B \leq G$; setze $M := A \cap B$, $A_1 = M_A$, $B_1 = M_B$, $M_1 = A_1 \cap B_1$, $A_2 = M_{1_A}$ usw., $\rho, \sigma, \dots$ seien Funktoren, die jedem X ein $X^\rho \leq X$ zuordnen, $X_\rho := \langle Y \lhd\lhd X | Y^\rho = 1 \rangle$, so dass $X, Y \lhd\lhd \dots \Rightarrow \langle X, Y \rangle^\rho = \langle X^\rho, Y^\rho \rangle$.



(1) $K \lhd\lhd B$, $\mathcal{N}_B K^\rho \leq A \Rightarrow K_\rho \leq B_1$.
Bew: $\langle K_\rho, K^b \rangle^\rho = 1$, $K_\rho \leq \mathcal{N}_B K^{\rho b} \leq A^b$. NB: Nicht vorausg: $K \lhd\lhd A$.



(2) $K \lhd\lhd B$, $K^\rho \trianglelefteq A$, $\mathcal{N}_B K^\rho \leq A \Rightarrow K_\rho \leq A_2$.
Bew (1): $K_\rho = K_\rho^A \leq B_{1A} = A_2$, $\pi := \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$, $\nu := X/X^\nu \in \mathfrak{N}$, X^ν min.



(3) Sei $K = K^\pi$ homogen (d.h. Erzeugnis isomor-
s. (4) pher einköpf.) $K \lhd\lhd B$, $\mathcal{N}_B K \leq A$. Dann $K \leq B_1$, und wenn $K \lhd A$, so $K \leq A_2$. $K' = K$.

(4) $K \lhd\lhd B$, $H := \langle$eink. perf. SNT von K max. Ordnung$\rangle$ [*Anmerkung:* genügt: Erzeugnis gewisser] . $\mathcal{N}_B H \leq H \Rightarrow K^\pi \leq B_1$ (also wenn $P = P' \leq K$ und $P \lhd A$, so $P \leq A_2$.

Sonderfall:

(5) $K \lhd\lhd B$, H wie in (4), $A := \mathcal{N}_G H \Rightarrow H \leq A_2$, und wenn $K^\pi \lhd A$, so $K^\pi \leq A_2$.

1/2

Zweckmässig.

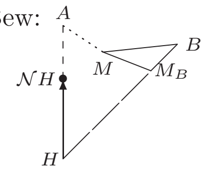
$$\text{Def: Charakteristik } \chi(G) := \begin{cases} p & \text{wenn } \exists S \lhd\lhd G, |S| = p, \\ & \text{und } T \text{ simple } \lhd\lhd G \Rightarrow |T| = p \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann $\ldots \Rightarrow |A_2|$ or $|B_2| = \chi(G)^{\therefore}$

$A \lhd N \,\mathrm{sn}\, B \Rightarrow A/A \cap N$ primär.

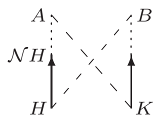
Sei P einköpfig perfekt, $P(G) := \langle Q | P \cong Q \trianglelefteq\trianglelefteq G\rangle$. Dann

(1) Aus $H = P(H) \lhd\lhd B, \mathcal{N}_G H \le A$ folgt $P(B) = P(A \cap B) = P\big((A \cap B)_B\big)$.

Bew: 

$M := A \cap B$, $B \trianglelefteq P(B) \le \mathcal{N}H \le A \cap B$, $M := A \cap B$, $(A \cap B)_B = B_1$. Daher $H \lhd\lhd M_B$, und wenn $M_B \lhd\lhd X \le G$, dann $P(X) \le A_B$. Insb. $P(M) \le A_B, B_B, M_B$.
Also $P(M) = P(M_B) = P(B)$.

(2) Aus $H = P(H) \,\mathrm{sn}\, B$, $K = P(K) \,\mathrm{sn}\, A$, $\mathcal{N}H \le A$, $\mathcal{N}K \le B$ folgt
$P(A) = P(A \cap B) = P(B) \quad (1)$,



insbes. $H \,\mathrm{sn}\, A$, $K \,\mathrm{sn}\, B$; sogar H,K sn $\langle A, B\rangle$, also $P(A) = P\big(\langle A, B\rangle\big) = P(B)$.

2/3

Gemeinsame Subnormalteiler

Vor: 1. Sei $\langle A, B\rangle = G$, $M_G = 1$, $A \cap B =: M$; $A_1 = M_A$, $B_1 = M_B$, $M_1 = A_1 \cap B_1$.

3. Sei A_2 minimal mit $A_2 \lhd A$, $A_2 \lhd\lhd B$
 〃 B_2 〃 $B_2 \lhd B$, $B_2 \lhd\lhd A$.

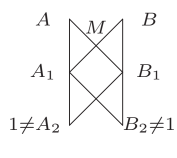
2. 〃 $1 \ne A_2 := M_{1_A}$, $1 \ne B_2 := M_{1_B}$

4. $A \ge \mathcal{N}_B A_2$, $B \ge \mathcal{N}_A B_2$

5. $\mathcal{N}_G A_2 = A$, $\mathcal{N}_G B_2 = B$

1,2 $\Rightarrow$ a) $\mathrm{soc}\, A, \mathrm{soc}\, B, \mathrm{soc}\, M \in \mathfrak{S}$ (aufl.)

b) $M_p \ne 1 \Rightarrow A_2^p = 1$ od $B_2^p = 1$ $(M_p = O_p(M))$



1,2,5 $\Rightarrow$ c)
$M_p \ne 1 \Rightarrow M_q = 1$ $(\forall q \ne p)$. Sonst etwa $A_2^p = 1$, $B_2^2 = 1$ nach b. $B_2^a \le \mathcal{N} A_2^6 = A^6$, $B_2^a \le A_B = B_1$, $B_2 \le A_2$ Wid.

1, 2 $\Rightarrow$ d) $\left.\begin{array}{c} M_p \neq 1,\ A_2^p \neq 1 \\ \mathcal{N}_G A_2^p = A \end{array}\right\} \Rightarrow p \ni B_2 \leq A_2.$

Bew: $B_2^a \leq \mathcal{N}{A_2^p}^{\ b} = A^b,\ B_2^a \leq B_1,\ B_2 \leq A_2.$

[h:] unschön [:h]

3/4

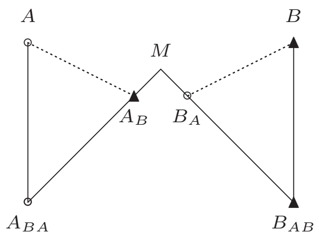
$\lhd\lhd$ Gemeinsame Subnormalt.: Schwache Vorauss.

V Sei $\begin{cases} N \lhd \begin{cases} A \\ B \end{cases} & \Rightarrow N = 1 \\ 1 \neq AB; \end{cases}$

d.h. $\quad - \quad = A \cap B = \quad -$

$\overbrace{\mathcal{N}_B(A_{BA})} \leq A; \quad \overbrace{\mathcal{N}_A(B_{AB})} \leq B.$

Setze $M := A_B B_A$, also $A_B \lhd M \rhd B_A$.



Satz (1)
Unter Vor. V gilt

a) $1 \neq \operatorname{soc} M$ auflösbar

b) Ist $p \in \pi$ und $\mathcal{N}_B A_{BA}^p = A \cap B$, so ist $B_{A_p} \leq A_{BA_p} \leq A_B$.

c) Wenn $B_{A_p} A_{B_p} \neq 1$, so ist entweder $\mathcal{N}_B A_{BA}^p > A \cap B$ oder $\mathcal{N}_A B_{AB}^p > A \cap B$.

Bew:

α) $\operatorname{soc} M = 1 \Rightarrow M = 1 \Rightarrow A_B = B_A = 1 \Rightarrow A_{BA} = B_{AB} = 1 \Rightarrow B \leq A \leq B \Rightarrow A = B = 1$ Wid.

β) $P' = P \lhd\lhd A_B \Rightarrow P \leq \mathcal{N}_A B_{AB}^a \Rightarrow P^a \leq \mathcal{N}_A B_{AB} \leq B \Rightarrow P \leq B_A \Rightarrow P \lhd\lhd B_A$.

γ) $\genfrac{}{}{0pt}{}{A}{B} \lhd P[A_B] = P[B_A] \Rightarrow = 1$ Wid.

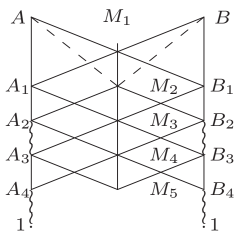
δ) $P' = P \lhd\lhd M \Rightarrow P \lhd\lhd \genfrac{}{}{0pt}{}{A_B}{B_A}$ od $\Rightarrow$ Wid.

4/5

Bew

b) Sei etwa $B_{A_P} \neq 1$. Dann $B_{A_P} \lhd\lhd M$. $B_{A_P} \leq \mathcal{N}(A^p_{BA})^b$,
$B^b_{A_P} \leq \mathcal{N}_B(A^p_{BA}) = A \cap B)$, $B_{A_P} \leq (A \cap B)_B \leq A_B \leq A$, $B_{A_P} \lhd A$,
$B_{A_P} \lhd A_{BA}$, $B_{A_P} \leq A_{BA_P} \leq A_{B_P}$

c) Sonst $B_{A_P} \leq A_{B_P} \leq B_{A_P}$, $B_{A_P} = A_{B_P} \lhd \frac{A}{B}$, $= 1$ Wid.



Seien A, B normalisator-abg., $M_1 = A \cap B$, $M_2 =$ größter gemeinsam. Subnormalteiler von A und B, $A_i = (M_i)_A$, $B_i = (M_i)_B$, und $M_{i+2} = A_i \cap B_i$. Dann sind die Strecken $\wr$ auflösbar (und A und B_2 primär etc.). Genauer: $A_2^\omega \neq 1 \Rightarrow A_{2_\omega} \leq A_3$, dh. $A_{2_\omega} < A_2 \Rightarrow A_{2_\omega} \leq A_3$.

5/6

$\lhd\lhd$ Gemeinsame SNT: Starke Vorauss.

Satz 1.
Vor: $A \neq B$, $A, B \lessdot G$, $A_G = B_G = 1$. $A_{BA} \neq 1 \neq B_{AB}$, $D := A \cap B$.

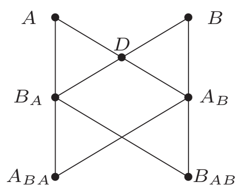
Beh: $\exists p \in \pi$:

a) A_{BA} oder B_{AB} ist p-Gruppe

b) Ist A_{BA} nicht p-Gruppe, so $B_{AB} \leq A_{BA}$

c) $\operatorname{soc} A, \operatorname{soc} B, \operatorname{soc} D$ sind p-Gruppen

d) $D_p = B_p = (A_B)_p$; $B_{AB} \leq (A_{BA})_p = (A_{B_p})_A$



Bew:

α) $B_A \leq D$, sonst $\langle B_A, A \rangle = G \lhd B_A = 1$ $B_{AB} = 1$ Wid.

β) $B_A = D_A \neq 1$, $A_B = D_B$

γ) $P_{\min} \lhd\lhd D$, $P = P' \Rightarrow P^b \leq \mathcal{N} A^b_{BA} = A^b$, $P \leq A_B \Rightarrow$
$P[D] = P[A_B] \lhd B$, $\unlhd A$, $= 1$, Wid. Also $P_{\min} \lhd\lhd D \Rightarrow |P| = p$.

δ) $A^p_{BA} \neq 1$ <u>und</u> $B^p_{AB} \neq 1 \Rightarrow P[D] \lhd \substack{A \\ B}$ Wid. also a) ✓, etwa $A_{BA}{}^p \neq 1$.
Dann $B_{AB} \in p$.

ϵ) $B^a_{AB} \leq \mathcal{N}(A_{BA}{}^p)^b = A^b$, $B^a_{AB} \leq A_B$, $B_{AB} \leq A_{BA}$, also b) ✓

ζ) $Q_{\min} \lhd\lhd D$, $|Q| \neq p \Rightarrow Q \leq \mathcal{N}(B_{AB})^a = B^a$, $Q \leq \mathcal{N}(A_{BA_p})^b = A^b$,
$Q \leq A_B \cap B_A$, $Q[D] = Q[B_A] = Q[A_B] \lhd \substack{A \\ B}$ Wid.

η) $Q_{\min} \lhd\lhd A$, $|Q| \neq p \Rightarrow Q \leq \mathcal{N}(B_{AB})^a = B^a$, $Q \leq B_A$, $Q \lhd\lhd D$ Wid.

ϑ) $Q_{\min} \lhd\lhd B$, $|Q| \neq p \Rightarrow Q \leq \mathcal{N}(A_{BA_p})^b = A^b$, $Q \leq A_B$ Wid.

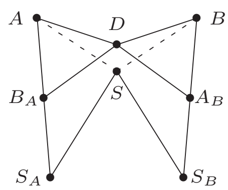
6/7
7.2.71

Satz 2: Vor: $A \neq B$; $A, B \lessdot G$; $A_G = B_G = 1$, $S \lhd\lhd A$, $S \lhd\lhd B$; $S_A \neq 1 \neq S_B$; $D := A \cap B$. Dann $\exists X \in \{S_A, S_B\} : X^{qp} = 1$, $(\mathrm{Sockel}\, X)^p = 1$. Beh:

(a) $S_A{}^\pi \leq A_{BA}$ *[Verweis auf $S_A{}^\pi$:]* d.i. der perfekte Teil von S_A

(b) $S_A{}^{\rho\sigma} = 1 \neq S_A{}^\sigma \Rightarrow S_A{}^{\rho\sigma} \leq A_{BA}$

(c) Falls weder S_A noch S_B primär, so $\exists p$: Die Sockel von A, B, D, S sind $\in p$.
Es ist $S_p \leq A_B \cap B_A$, $S_{A_p} \leq A_{BA}$, $S_{B_p} \leq B_{AB}$. Ferner ist $S_A{}^{qp} = 1$ oder $S_B{}^{rp} = 1$ mit $r, q \in \pi$.



Bew

(a) Sonst $1 \neq S_A{}^\pi = \prod H$, $H_{\mathrm{hom}} \lhd A$, $H^b \leq \mathcal{N} H = A$, $H \leq A_B \leq A_{BA}$.

(b) $S_A{}^{\rho\sigma} = 1 \neq S_A{}^\sigma \Rightarrow S_A{}^{\rho b} \leq \mathcal{N} S_A{}^\sigma \Rightarrow S_A{}^\rho \leq A_{BA}$.

(c) S_A nicht primär $\Rightarrow A_{BA} \neq 1$.

(d) Wenn weder S_A noch S_B primär, so $A_{BA} \neq 1 \neq B_{AB}$

(1): $\exists p : \mathrm{soc}\,(A, B, D, S) \in p$ und A_{BA} oder $B_{AB} \in p$.
Wenn $A_{BA} \in p$, so $S_A{}^\pi = 1$, $S_A{}^{q\cdot\cdot} = 1$, $S_A{}^q \leq A_{BA}$, $S_A{}^{qp} = 1$;
Wenn $B_{AB} \in p$, so $S_B{}^{rp} = 1$. In jedem Fall $S_p{}^b \leq \mathcal{N} S_{A_p} = A$, $S_p \leq A_B \cap B_A$. Daher $S_{B_p} \leq B_{AB}$. NB: Wenn $q \neq r$, so $B_{rp} \leq \mathcal{N} S_A{}^{rp} = A$, $B_{rp} \leq A_B$, $A_{qp} \leq B_A$.
NB: $\mathrm{Ztr}({}^p_q\mathrm{Sy}\ B) \leq A_B$.

$\lhd\lhd$ Gemeinsame Subnormalteiler, starke Vor.

1. Beispiel von B.Fischer (31.1.71, Oxford)
   Für $G = \mathrm{Sym}\,6$, $A = \mathrm{Zs}(12)$, $B = \mathrm{Zs}(12)(34)(56)$ ist $G \gtrdot A$, $A_{BA} = \langle(12)\rangle$, $B_{AB} = \langle(12)(34)(56)\rangle$
   Bew: $A_B = \langle(12)\rangle\langle(34)\rangle\langle(56)\rangle$, $B_A = \langle(12)\rangle \cdot V_4(3456)$.

2. Sei $A \lessdot G$, $A_G = 1$, $N \lhd A$; nicht $(N^{qp} = 1,\ (\mathrm{Soc}\,N)^p = 1)$. Sei $N \leq S \lhd\lhd A$. Dann $S \lhd\lhd B \lessdot G \Rightarrow S_B qp = 1$, Sock $S_B{}^p = 1$ und $\mathcal{N}S \leq A$.
   Sonst $\exists t \in \mathcal{N}S: \ A^t = B \neq A$, $S_A \geq N$, $S_B \geq N^t \notin qp$, Wid. zu S.7

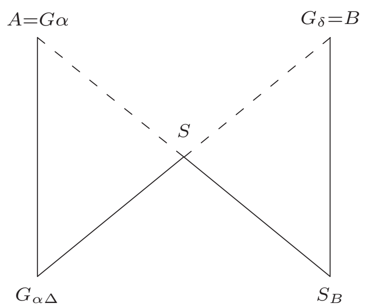
3. $A, B \lessdot G$, verschieden, $U^A \lhd\lhd B$, $U^b \lhd\lhd A \Rightarrow U^{qp} = 1$.
   Bew: S.7, $S := U^A U^B$.

4. $A, B \lessdot G$, $A \neq B$, $U^{AB} \leq A$, $U^{BA} \leq B \Rightarrow U^p = 1$.

Subkonstituenten prim. Gruppen
SIMS

Satz 1:
$K = K' \in \mathfrak{N}$

Hat G_α auf einer selbstgepaarten Bahn Δ einen nilpotenten Konstituenten, so ist $G_{\alpha\Delta}^{qp} = 1$ für passende Primzahlen p, q
Bew:



$S_A \cong S_B \in \mathfrak{N}$, also $S := G_{\alpha\delta} \lhd\lhd \begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}$,
$S_A \cong S_B$ erfüllt p.7, Satz 2c.

Allgemeiner:
Satz 2
$K, K' \in \mathfrak{N}$

Hat G_α auf zwei gepaarten Bahnen Γ, Δ nilpotente Konstituenten, so ist $G_{\alpha\Gamma}$ oder $G_{\alpha\Delta}$ eine qp-Gruppe: $X^{qp} = 1$, $(\mathrm{Sockel}\,X)^p = 1$ ($X^p = 1$ zugelassen). Bew. S.7 Satz 2

Frage über
trans. G

Frage: Kann bei transitivem G $G_\alpha^\Gamma \in \mathfrak{N}$ sein, $G_\alpha^{\Gamma'}$ aber $\notin \mathfrak{N}$?

Methode f. SIMS — Kann man Selinkas distrib. Subnormalfunktoren $\mho^p_k$ etc. (4.15) für das SIMS-Problem verwenden?

9/10

gepaarte Konstituenten zweier PermDarst.

Paare von transitiven Darstellungen zweier Ugr A, B von G:
Sei $G = \sum Ag_iB$. Dann heißt der tra Konst von A auf $Bg_i^{-1}A$ in $G : B$ gepaart mit dem 〃 B auf Ag_iB in $G : A$. Gepaarte Konst haben proportionale Grade. Wenn 2 gepaarte nilp. mit $A, B \lessdot G$, so ist wohl der Kern qp.
Gradsätze? Struktur?

10/11

Gruppen von Grad p

Von den 1970 bekannten einfachen Gruppen besitzen genau die folgenden Untergruppen vom Index p: PSL$(2,5)$, PSL$(2,7)$, PSL$(2,11)$, M_{11}, M_{23}; PSL(n,q) wenn $\frac{q^n-1}{q-1} = p$; A_p.
(P.Neumann, OW 1971)

11/12

A. Schinzel

Math. Inst PAN, Śniadeckych 8, Warzawa 1

25.2.71

schrieb mir am 17.2.:
In der PermGr $\mathrm{Aff}(n,p) =: G$ gilt die Zyklen-Eigenschft: $\sigma \in G$, Zyklenlängen von σ haben ggT $= 1 \Rightarrow \sigma$ hat Fixpkt. Er fragt: Folgt das aus der unionproperty wenn $H \leq G$, $H \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Omega} G_\alpha$ dann $\exists \beta \in \Omega : \ H \leq G_\beta$.

Ich habe mir überlegt:
Sei G eine PermutGr des Grades n mit regulärem Normalteiler N. Hat ein $H \leq G$ eine normale $\pi(n)$-Hallgruppe N_σ mit Fixpunkt, so hat H einen Fixpkt (Bew: Zassenhaus-Thompson auf den Konst. von $\mathcal{N}_G N_0$ auf Fix N_0 anwenden). Daher gilt die Zykleneigenschaft für jede Gruppe G vom Grad p^α mit reg. Normalteiler.

Frage: Gilt etwa stets $H \cap N = 1 \Rightarrow \mathrm{Fix}\, H \neq \emptyset$? (Klar ist, dass für jedes F mit $N \leq F \leq G$ F über M zerfällt: $F = NF_1$.) Nein! $G: \ |G| = p^\alpha$, $N \underset{p}{\lhd} G$, $G = NA = NB$, $|A| = |B| = p$, $A \cap \mathrm{Ztr}\, G = B \cap \mathrm{Ztr}\, G = 1$, $A \underset{G}{\neq} B$.

12/13

$\lhd\lhd$: Join problem, Permutability

Frage: Sei $A_i \lhd\lhd G$ $(i = 1 \ldots n)$ und $J := A_1A_2\cdots A_n \leq G$. Ist dann $J \leq G$?
[gemeint ist wohl: $J \lhd\lhd G$]
Allgemeiner:

Frage: Seien $A_i \lhd\lhd G$ $(i = 1 \dots n)$; Sei B maximal unter den Untergruppen von G, die in $A_1 A_2 \cdots A_n$ enthalten sind. Ist dann $B \lhd\lhd G$?

Bem: Eine schwache Form der Vertauschbarkeit von A, B besteht darin, dass $\langle A, B\rangle$ bei der Zerlegung nach dem Doppelmodul A, B nur eine beschränkte Zahl von Summanden hat.

Frage Genügt eine in diesem Sinn schwache Vertauschbarkeit von A mit allen A^x, um $A \lhd\lhd G$ zu machen?

Forts. 14

13/14

$\lhd\lhd$ weak permutability

Def: $A_1, A_2, \dots, A_n$ $(\leq G)$ cg (conjoint globally) $:\Leftrightarrow \prod_{\nu=1}^{n} A_\nu$ unabh. von Reihenfolge

(i) $A_1, \dots, A_n \,\mathrm{cg} \Rightarrow A_1 A_2 \dots A_n \leq G$.

Def: $A_1 \dots A_n \quad Gcg :\Leftrightarrow \forall_{x_r \in G},\ A_1^{x_1} \dots A_n^{x_n}$ cg.

? $A_1 \dots A_n \quad Gcg \;\Rightarrow\; A_1^T, A_2, \dots, A_n G\,\mathrm{cg}$ $(T \leq G)$? Dann könnte man Kegel nachmachen.

Sei $A, B \lhd\lhd G$ (endl.), $1 = (|A : A'|, |B : B'|, |G : A|, |G : B|)$.
Folgt dann $A \,\mathrm{v}\, \mathrm{B}$?

14/15

27.6.71

Der Subzentralisator - Normal. Sätze

Satz: $|G| < \infty \Rightarrow [\mathrm{Sockel}\, G, \mathrm{Fitting} G] = 1$.
Bew. wie [53]. oder direkt: genügt $N \underset{\min}{\lhd} G$, $N \in p$, $S \in p$-Sy Fitt G, aber $N \leq P$, daher $[N, P] < N, = 1$.

Satz: $A \lhd\lhd G$, $A \leq \mathcal{C}A_p \Rightarrow A^p \leq \mathcal{C}G_p$
Bew: OBdA $A = A^p$, $[A, G_p] \leq A_p$.

Kor.: $A \lhd\lhd G$, $A \leq \mathcal{C}A_{\mathfrak{N}} \Rightarrow A^{\mathfrak{N}} \leq \mathcal{C}G_{\mathfrak{N}}$
$\uparrow$ Fitt$A$

15/16

gesamte Seite grün durchgestrichen
6.9.71

Subnormalisator $|G| < \infty$

Aus $A \lhd\lhd \langle A, A^g\rangle$ für alle $g \in G$ folgt $A \lhd\lhd G$

Bew: (0) min Geg $A^G = G$, $1 \neq N \lhd G \Rightarrow G = AN$

(1) $A = A'$ einfach: $A \,\mathrm{v}\, A^g$

(2) A einfach, $A' = 1 : \langle A, A^g\rangle p$-Gr. Baer (Gorenstein) Math Ann 133, 256

(3) G ist nicht einfach in min Gegenbeispiel

(4) Sei $N_{\min} \trianglelefteq G$. Es ist $NA \lhd\lhd G$ nach Minimalität, also $G = NA$. $D := A \cap N \trianglelefteq A$, und $D < A$, also nach Indukt bzgl M, $D \lhd\lhd G$, $D \lhd\lhd N$, $D \trianglelefteq N$, $D \trianglelefteq G$. $\underline{D = 1}$ da sonst $D = N$, $G = AN = A$. Also hat A nur p-Füße (sonst wähle N passend), $|N| = p^\nu$. Wegen $G = NA$ ist $|\langle A, A^g\rangle : A| = p^\lambda$, daher $A^p \trianglelefteq \langle A, A^g\rangle$, $G = A^G \leq \mathcal{N}(A^p)$. $A^p \trianglelefteq G$. Also $A^p = 1$, da sonst [*durchgestrichen:* $\exists N$ mit $N \cap A^p \neq 1$] $G = A^p A \supset A$. Dann ist $G = AN$ eine p-Gr, $A \lhd\lhd G$. Forts: 19

Kürzer: E einf SNT von $A \to E^G \leq \mathcal{N}(A)$ wenn $E = E'$.
$\leq \mathcal{N}(AP)$ wenn $|E| = p$
$1 \neq N \lhd G \Rightarrow G = AN$.
im ersten Fall $G = E^G A \rhd A$
im zweiten $A^p \trianglelefteq G$, $G = A^p G$ wenn $A^p \neq 1$. Also $A^p = 1$. Nun Baer: $A^G p$-Gr.

[*Folgendes ist durchgestrichen:*]
NB: Aus $B \leq \mathcal{S}_G(A)$ folgt nicht $A \lhd\lhd \langle A, B\rangle$.
Beispiel: $G = \mathrm{Sym}\,6$, $A = \langle(12)\rangle$, $B = \langle(135)(246)\rangle$
Besser $G =$ Alt 6, $A = \langle(12)(34)\rangle$, $B =$ ″

16/17

6.9.71

Sn.-Funktoren

1. Aus $A, B, C \lhd\lhd G$, $A^\alpha \,\mathrm{v}\, BC = CB$, $C^\alpha \subseteq AB^\alpha$ folgt $A \,\mathrm{v}\, B^\alpha$, $A^\alpha \,\mathrm{v}\, B$.
Bew: $A^\alpha \,\mathrm{v}\, BC \lhd\lhd G$, $A \,\mathrm{v}\, B^\alpha C^\alpha$, $\underset{AB^\alpha}{\underset{||}{AC^\alpha}} B^\alpha = B^\alpha \underset{B^\alpha A.}{\underset{||}{C^\alpha A}}$
Also aus $C^\alpha \leq AB^\alpha$ folgt

2. $\alpha \in \mathcal{N}$ (Def nachstehend), $A, B \lhd\lhd G$, $A \,\mathrm{v}\, B \to (AB)^\alpha = A^\alpha B^\alpha$.

Def $\alpha \in \mathcal{N}$ (Normalfunktoren) $:\Leftrightarrow$ ($A^B = A$, $B^A = B \to (AB)^\alpha = A^\alpha B^\alpha$, $\alpha\sigma = \sigma\alpha$ für Isom σ)

Satz 3 $\alpha \in \mathcal{N}$, $\nu : G \to F = G^\alpha \in \mathfrak{N}$ ein Homomorphismus $\to$ $\underline{\alpha\nu = \nu\alpha}$.
Bew: $H := G \times F$, $(g, f)^\pi = f$, $g^\sigma := gg^\nu$, $\sigma : G \to H$. Dann $\sigma\pi = \nu$. Es ist

b) $G^{\sigma\alpha} = G^{\alpha\sigma}$, daher $G^{\sigma\alpha\pi} = G^{\alpha\nu}$

a) Es ist $H/\operatorname{Ker}\nu \cong F \times F \in \mathfrak{N}$ und $\operatorname{Ker}\nu \leq G^\sigma \leq H$, also $G^\sigma \trianglelefteq\trianglelefteq H$. Ferner $H = GG^\sigma = GF$, daher (nach 2) $G^\alpha G^{\sigma\alpha} = G^\alpha F^\alpha$, π macht hieraus $G^{\sigma\alpha\pi} = F^\alpha$. Mit a) gibt das $\underline{G^{\alpha\nu}} = G^{\sigma\alpha\pi} = F^\alpha = \underline{G^{\nu\alpha}}$.

4. $|C| = p$, $\alpha \in \mathcal{N}$. Dann ($C^\alpha = 1 \Rightarrow G^\alpha = 1 \;\; \forall \;\; G \in \mathfrak{G}_p$.) $C^\alpha = C \Rightarrow G^\alpha = G \; \forall \; G \in \mathfrak{G}_p$.
Bew a) G werde von seinen Elementen der Ord p erzeugt. Indukt $|G|$.
b) G beliebig: $G \leq H$ vom Typ (a) (z.B. Sylowgr. d. symm. Gr.).
Kurz: Auf $\mathfrak{G}_p$ ist $\alpha = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

17/18

Normalfunktoren

5 Mit Homos sind Norfkt <u>i.a. nicht</u> vertauschbar, z.B. kann α die einfache perf.Gr. A zu 1 machen, aber nicht eine eink. Gruppe mit Kopf A in ihren Rumpf abbilden.

$\alpha \in \mathcal{N}$:

6 Man kann $|\alpha|_G$ definieren als $\sum j(F^\alpha) - 1$, wobei F alle subnormalen (Ausschnitte oder) Untergruppen von G durchläuft. Es ist

$$|\alpha|_G \geq 0, = 0 \text{ genau wenn } \alpha = 0$$
$$|\alpha|_G \leq |\alpha + \beta|_G \leq |\alpha|_G + |\beta|_G$$
$$|\alpha\beta|_G \leq |\alpha|_G, \;\; |\beta|_G.$$

Man sollte die Beweise durch Gegenbeispiele mit kleinstem $|\alpha|_G$ führen und Zerlegungen wie $\alpha = (\pi \times \pi')\alpha(\rho \times \rho')$ benutzen

7 Das Erzeugnis zweier α-Bilder ist stets wieder eins:

$$\langle A^\alpha, B^\alpha \rangle = \langle (A^\alpha)^{B^\alpha}, B^\alpha \rangle = \langle (A^{B^\alpha})^\alpha, B^\alpha \rangle$$

Forts. 21 vorausgesetzt, dass das Produkt vertauschbarer α-Bilder wieder ein α-Bild ist. Bew: Ind $|A| + |B|$.

18/19

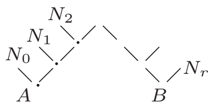
11.9.71

Subnormalisator

$A, B \le G: \ \mathcal{S}_G(A,B) := \{x \in G | A^x \lhd\lhd \langle A^x, B\rangle \rhd\rhd B\}$.
Sei $S \subseteq \mathcal{S}_G(A,B)$. Dann gilt

(1) $A_p \le \mathcal{N}_G(B^p)_{\overline{S}}$ ($:= G$, wenn $S = \emptyset$), ${A_p}^S \le \mathcal{N}_G(B^p)$.

(2) $A = A^p \le \mathcal{C}(A_p) \to A \le \mathcal{C}_G(B_p)_{\overline{S}}$, $A^S \le \mathcal{C}_G(B_p)$.

(3) 

$\Rightarrow N_0 N_1 N_2 \dots N_r \subseteq \mathcal{S}(A,B)$, $N_r N_{r-1} \dots \subseteq \overline{\mathcal{S}}(A,B)$

(4) Ist G eine tra PGr, $A \trianglelefteq\trianglelefteq G_\alpha$, so gilt $\{g \in G | \alpha^g = \beta, A \lhd\lhd G_\beta\} \subseteq \mathcal{S}(A)$.

(5) Sei $A, B \le G$ und (G,Ω) eine Perm.-Darst. von G. Setze $\sum_A := \{\gamma \in \Omega | A \lhd\lhd G_\gamma\}$. Sei $g \in G$, $\sum_A^g \cap \sum_B \neq \emptyset$. Dann ist $g \in S(A,B)$.

So erhält man ganz $S(A,B)$. Also:

(6) $S(A,B) = \{g \in G | \exists (G,\Omega)$ mit $\sum_A^g \cap \sum_B \neq \emptyset\}$. $S(A,B)$ bringt A in die Lage, auf B zu wirken.

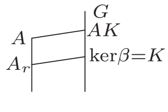
Deutung: Der Subnormalisator $\mathcal{S}(A,B)$ bringt A in die Nähe von B. Def: U nahe $V :\Leftrightarrow U, V \trianglelefteq\trianglelefteq \langle U, V\rangle$. "$U, V$ haben gemeinsame Vorfahren."
$g \in \mathcal{S}(A,B)$ adjustiert A auf B. Forts: 21

19/20

11.9.71
Forts. Normalfunktoren von S.18

! auch SN? (1) $* : A \mapsto [A^p, A_p]$ ist Normalfunktor. $\leftarrow$ auch $[A^p, {A^p}_p]$, dann natürlich.
Bew: $A, B \trianglelefteq J$, $N := [A, A_p][B_p, B] \trianglelefteq J$.
Erz. N ist $[J^p, J_p] = [A^p, J_p][B^p, J_p] = [A^p, A_p][B_p, A_p] \equiv 1$.

(3) Hilfssatz: Ist $A \trianglelefteq\trianglelefteq G$, so ist $[A^p, A_p] = [A^p, G_p] = [A^p, A^p_p] =: M \trianglelefteq G$.
Dann mod M ist $[A^p, A_p] = 1$, $[A^p, G_p] = 1$.
besser: $\overline{}$ = Hom. auf G/M, $1 = \overline{[A^p, A^p_p]} = [\overline{A^p}, \overline{A^p_p}] = [\overline{A}^p, \overline{A}^p_p]$, also $[\overline{A}_p, \overline{G}_p] = 1$, $[A_p, G_p] \le M$

(bei $\ker\varphi \in p$ ist $\overline{A_p} = \overline{A}_p$ & $\overline{{A^p}_p} = \overline{A^p}_p$!


Ist $[G^\alpha, G_\alpha]$ Funktor?

Aus $[A^{\mathfrak{C}}, A_{\mathfrak{C}}] = 1$, $A \lhd\lhd G$ folgt $[A^{\mathfrak{C}}, G_{\mathfrak{C}}] = 1$.

Forts. von S.19: <u>Subnormalisator</u>

1. $$\begin{tikzcd} \overline{A} \arrow[r] & \overline{B} \\ A \arrow[u, dash, dashed] & B \arrow[u, dash, dashed] \end{tikzcd}$$
$$\begin{aligned} & A = A_1 \trianglelefteq\trianglelefteq \cdots \trianglelefteq\trianglelefteq A_k \trianglelefteq \overline{A}, \\ & B = B_1 \trianglelefteq\trianglelefteq \cdots \trianglelefteq\trianglelefteq B_l \trianglelefteq \overline{B} \\ & \to \mathcal{N}(A_1)\mathcal{N}(A_2)\cdots\mathcal{N}(A_k)\cdot\mathcal{S}(\overline{A},\overline{B})\mathcal{N}(B_k) \\ & \cdots\mathcal{N}(B_1) \subseteq \mathcal{S}(A,B) \end{aligned}$$

2. $\mathcal{N}(A)\mathcal{S}(A,B)\mathcal{N}(B) = \mathcal{S}(A,B)$

Frage: 3. Wie ist $\mathcal{N}(A)$ in $\mathcal{S}(A,B)$ ausgezeichnet? Als Linksmuiltiplikator?

4. Eigentlich sollte man $\mathcal{S}_{\mathrm{aut}\ G}(A,B)$ oder $\mathcal{S}_{\mathrm{Op}\,G}(A,B)$ bilden. Für $\alpha \in \mathrm{Op}\ G$, $\overline{B} = \overline{A}^{\alpha}$ in (1) ist z.B.
$$\prod_{\rightarrow} \mathcal{N}(A_i)\alpha \prod_{\leftarrow} \mathcal{N}(B_j) \leq \mathcal{S}(A,B)$$
daher z.B: $A_{\mathfrak{N}}^{\prod \mathcal{N} A_i \alpha \prod \mathcal{N} B_j} \leq \mathcal{N}(B^{\mathfrak{N}})$.
Was man allerdings so erhält geht auch durch Transformation $A \to A^{\alpha}$.

5. Aus $x \in \mathcal{S}(A)$ folgt nicht $x^2 \in \mathcal{S}(A)$. $G = S^5$, $x = (1\ 3\ 5\ 2\ 4)$, $A = \langle(1\ 2)\rangle$, $A^x = \langle(3,4)\rangle$, $A^{x^2} = \langle(5\ 1)\rangle$.

Ganz schwache Abschlüsse

Def: Sei $\mathfrak{T} \subseteq 2^G$; $A, B \leq G$. Dann
"sehr schwache Abschließung" von A in $B := \langle A^T \mid A^T \leq B, T \leq G\rangle =: \widehat{A}$
[*Anmerkung* : besser: A^{SS}],
subnormale 〃 〃 $:= \langle A^t \mid A^t \trianglelefteq\trianglelefteq B\ \forall t \in T; T \in \mathfrak{T}\rangle := \overline{A} = A^{SSS}$.
Bezeichnung: [ausgestrichen]
Es ist $[A \leq]\overline{A} \leq \widehat{A} \leq B$ [nur wenn $A \leq B$].

$$\text{Satz:}\quad \begin{aligned} & \overline{A} \leq Z \leq B \to \mathcal{N}(Z) \leq \mathcal{N}(\overline{A}), \\ & \widehat{A} \leq Y \trianglelefteq\trianglelefteq B \to \mathcal{N}(Y) \leq \mathcal{N}(\widehat{A}). \end{aligned}$$

Beide Operatoren sind idempotent. Ganz schwach abg. ist z.B. der schwache Abschluß A^S. Darin steckt auch Knapp 5.8, ebenso meine Fälle: $A = B^{\mathfrak{E}} \Rightarrow A^{SSS} = A$.
Ist $\mathfrak{K}$ eine nicht notw iso. abg. Klasse von Gruppen, H eine Gruppe, so braucht man oft das Erzeugnis der (subnormalen) $\mathfrak{H}$-Gruppen in H. Schreibweise $\langle \mathfrak{H} H\rangle$ bzw. $\langle \mathfrak{H} s H\rangle$.

| Arbeitsthema Satz: Ist $H \leq G$ und $\mathfrak{H}$ ein G-inv. Teil von 2^G, so folgt aus $\langle \mathfrak{H} H \rangle \leq Z \leq H$: $\mathcal{N}(Z) \leq \mathcal{N}\langle \mathfrak{H} H \rangle$ und aus $\langle \mathfrak{H} s H \rangle \leq Z \lhd\lhd H$: ...
Zusammenhang mit Alperin?

22/23

Allgemeine Strukturbeziehungen

12.9.71

Satz 1 Sei $A \leq G$, $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ Klassen mit $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{N}\mathfrak{Y}$. Dann ist für jede Hilfsgruppe $B \leq G$: $\mathfrak{X}(A) = \mathfrak{X}(A \cap (\mathcal{N}\mathfrak{Y}B)_{\mathcal{S}(BA)})_{\cdot\cdot A}$. Wenn $(\mathcal{N}\mathfrak{Y}B)_{\mathcal{S}(BA)} \leq C$ mit $A \cap C \lhd\lhd A$, so ist $\mathfrak{X}(A) = \mathfrak{X}(A \cap C)$.

1′ Kürzer:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{X} \subseteq \mathcal{N}\mathfrak{Y} \\ \mathcal{N}(\mathfrak{Y}B)_{\mathcal{S}(BA)} \leq C \\ A \cap C \lhd\lhd A \end{array}\right\} \Rightarrow \mathfrak{X}(A) = \mathfrak{X}(A \cap C).$$

2. $B \trianglelefteq M \lessdot G$, $M_G = 1$, $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{N}\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Y}B \neq \emptyset \Rightarrow \mathfrak{X}(A) \subseteq \mathfrak{X}(A \cap M_{\mathcal{S}(BA)})$
$A\alpha \in \mathcal{N}B^\alpha$ im Sinn von $X \in \mathcal{N}Y \Leftrightarrow X \cong X_1 \lhd\lhd \ldots \rhd\rhd Y_1 \cong Y \Rightarrow X_1 \leq \mathcal{N}Y_1$

3. Sei $\mathcal{N}B = \widehat{B} \lessdot G$, $\widehat{B}_G = 1$, $\mathfrak{Y}^{\mathfrak{X}} = \mathfrak{Y}$. Dann $\mathfrak{Y}B = \emptyset$ oder $\langle \mathfrak{X}A \rangle \leq \widehat{B}_{\mathcal{S}(BA)}$.

23/24

[gesamte Seite 24 leer]

24/25

PGr: Deutung von Punkten

16.9.71

Def Ist $G \leq S^\Omega$, so "deute $(\alpha, \beta)^* \in \Omega \times \Omega$ in G" als $\{g \in G \mid \alpha^g = \beta\} =: G(\alpha \to \beta) = (\alpha, \beta)$ in G.
Deutung im Gruppenring * $\quad \widehat{(\alpha, \beta)} = \frac{1}{|G_\alpha|} \sum x$, $x \in G(\alpha \to \beta)$.
Dann ist nach Wahl von $0 \in \Omega$ ungefähr $\widehat{\Delta(\alpha)} = \widehat{\Delta}\widehat{\alpha}$, wo Δ Bahn von G_0.
Dann ist z.B. in G $(\alpha, \beta)^g = g^{-1}(\alpha, \beta)g = (g^{-1}\alpha g, g^{-1}\beta g)$, $\alpha(\alpha\beta) = (\alpha\beta) = (\alpha\beta)\beta$, $(\alpha, \beta^g) = (\alpha\beta)g$, $(\alpha^g, \beta^h) = g^{-1}(\alpha\beta)h$.
Deute 2-rel G, Schurring; das sollte Knapps Schurhalbring umfassen (dort fehlt aber die Wirkung von G durch Rechtsmult., das typische an Schurs Methode.)

* Besser: Pfeile $\alpha \to \beta$ deuten:

Def Für $\begin{cases} G \leq S^\Omega \text{ und} \\ \alpha, \beta \in \Omega \end{cases}$ sei $\alpha \xrightarrow{G} \beta := \{g \mid \alpha^g = \beta\}$ (in G)
$\downarrow$
$\alpha \xrightarrow{\mathbb{Q}G} := \frac{\sum g}{|G_\alpha|}$ (in $\mathbb{Q}G$),
d.h. $\widehat{(\alpha, \beta)} \in \mathrm{Hom}(F, F)$. $\uparrow$ oder noch besser die Matrix $\frac{\sum D(g)}{|G_\alpha|}$, $D(g) \in \mathbb{Q}_{\Omega \times \Omega}$.

(11.4.72) Die G-invarianten Funktionen zweier Var. über $\Omega = G : H$ sind die diag $G \times G$-rechts - und $H \times H$-linksinvarianter Funktionen auf $G \times G$.

25/26

P-Gr

1. Gleichheiten in der approximierenden Folge $S^\Omega \geq G^{(1)} \geq G^{(2)} \geq \cdots \geq G^{(n)} \geq \cdots \geq G$: Eine ähnliche Frage für universelle Algebren behandelt R.W.Quackenbusch: The descending varietal chain of a variety. Abstract 72 T - A 212, Notices AMS 19, φ : A 576

26/27

Subnormalisator u. Verwandtes

<u>4.1..71</u> $|G| < \infty$. Dann

$$\begin{aligned} A \lhd\lhd G \Leftrightarrow &\text{ aus } g \in \langle A, A^g \rangle \text{ folgt } g \in A \\ \Leftrightarrow &\text{ aus } g \notin A \text{ folgt } g \notin \langle A, A^g \rangle \end{aligned}$$

6.11.71 $|G| < \infty$, $A \leq G$, $(G, a, a, \dots) \subseteq A$ f. jedes $a \in A \Rightarrow A \lhd\lhd G$.
Bew: Sei G Gegenb. minim. Ordnung, auch A minimal. $A \leq H < G \Rightarrow (H, a, \dots,) \leq A \Rightarrow A \lhd\lhd H$. $\exists_1 M \lessdot G$, $A \leq M$; $A^x \leq M \Rightarrow x \in M$. Ist $B \lhd\lhd A$, so $(G, b, b, \dots) \leq (A, b, b, \dots) \leq B$, also $B \lhd\lhd G$. Daher ist A einköpfig: $R \lhd\cdot A$, $R \lhd\lhd G$.

$R = 1$ [sonst wähle $N_{\min} \trianglelefteq G$; $A, N \leq \mathcal{N}R$;
falls $R \trianglelefteq G$, geh in G/R: $A/R \lhd\lhd G/R$, $A \lhd\lhd G$ Wid.
also $R \ntrianglelefteq G$, daher $AN < G$, $A \lhd\lhd AN \lhd\lhd G$ Wid.]

Also A einfach. Falls $|A| = p$, dann $(x, a) \in M \Rightarrow a^x \in M \Rightarrow A^x \leq M$, $x \in M \Rightarrow G \leq M$ Wid.
Also $A' = A$. Ist $x \notin M$, so $D := A^x \cap A \neq A$; $(G, d, d, \dots) \leq A^x \cap A = D$, $D \lhd\lhd G$, $D < A$, $D = 1$. Ist $x \notin M$, so $E := A^x \cap M < A^x$, $(M, e, e, \dots) \leq A^x \cap M = E$, $E \lhd\lhd M$, $(E, A) = 1$. Wäre $E \neq 1$, so $A^x \cap A^{xa} \geq E > 1$, $A^x = A^{xa}$, $A^x \lhd \langle A, A^x \rangle = G$ Wid., also $A^x \cap M = 1$ wenn $x \notin M$. Aber $\forall a \neq 1, x \notin M :\ a^x \in M$ Wid.

27/28

Subnormalisator (Forts.)

Satz: Jedem $g \in G$, $a \in A$ sei ein $g_a \in G$ so zugeordnet, dass
$x_a \in \langle a \rangle b^{x^{\pm 1}} \langle a \rangle$ für ein $b \neq 1$ in $\langle a \rangle$,
für jedes $t \in G$ mit $a^t \in A$ $x^t_{a^t} = (x_a)^t$ gilt.
Sei $g_{a,a,\dots} \in A$ (genügend lang) für alle g, a. Dann ist $A \trianglelefteq\trianglelefteq G$.
Bew. wie S.27:
$G \min B \lhd\lhd A \Rightarrow B \lhd\lhd G$, A einfach.

Fall $|A| = p$:, $x \notin M$, $x_a \in M \Rightarrow b^{x^{\pm}} \in M$, $A^{x^{\pm}} \in M$ **???**
Fall $A' \neq 1$: $D := A \cap A^t = 1$ für $A^t \neq A$, da $D \trianglelefteq\trianglelefteq A$ einfüssig. $E := A \cap M^x = 1$ für $x \notin M$, da $[E, A^x] = 1$, $A \cap A^{a^x} \geq E$. $E \neq 1 \Rightarrow a^x \in \mathcal{N}A$, $A^x \leq \mathcal{N}A$, $AA^x = G$, $A \trianglelefteq G$ Wid.
$\exists x \in M$, $a \neq 1 \in A$, $x_a \in M$, dann $b^{x^{\pm}} \in M$, $A \cap M^{x^{\pm}} \neq 1$, $x \in M$ Wid.

Folge:

<u>Satz</u> $A \leq G$, $a^{a^{/^{a^g}}} \in A$ f. alle $a, g \Rightarrow A \trianglelefteq\trianglelefteq G$.
schärfer:

<u>Satz</u> $A \leq G$, $A = \langle E_\nu \rangle$, $E_1^{E_2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{E_n^G}}}}} \leq A \Rightarrow A \lhd\lhd G$.

28/29

11.11.71

Sei G eine endliche Gruppe. Bilde den Graphen $\overrightarrow{G}$, dessen Ecken die Klassen erzeugungsäquivalenter Elemente $\neq 1$ von G sind: $\{x\} = \{y\} \Leftrightarrow \langle x \rangle = \langle y \rangle$, (Wir bezeichnen sie aber als Elemente von $\overrightarrow{G}$ kurz mit x), und $x \to y$ bedeutet $y \in \langle x, x^y \rangle$, d.h. $[\langle x \rangle, \langle y \rangle] = \langle x \rangle^{\langle y \rangle}$. Führe $\overrightarrow{x}; = \{y \mid x \to y\}$ als (die kleinste) Basisumgebung von x ein und bilde Topologie. Dann sind die offenen Mengen die nach rechts unbeschränkt durchlaufenden (randlosen). $A^0 = \{x \mid \exists A \to x_1 \to \cdots \to x\}$ ist die kleinste A enthaltende offene Menge (offene Hülle).
${}^0A = \{y \mid \exists A \leftarrow y_1 \leftarrow \cdots \leftarrow y\}$ ist der topologische Abschluß von A.
Sei für $A \subseteq G$ $F_{[0]}[x_i \mid A]$ die Menge der Elemente von $G * \langle x \rangle$, die in reduzierter Form Koeff aus $\langle A \rangle$ haben [und für x_i die Exponentensumme 0]. Dann gilt: Für $A \subseteq G$ ist
FM Th

I. A° = subnormale Hülle von $\langle A \rangle$ in G

II. $= \{c \in G \mid \exists f \in F_0[x \mid A]$ mit $f(c) = c\}$. Kurz: $c \in F_0[c \mid A]$.

29/30

Beweis II

(a) $c \in \vec{a} \Leftrightarrow c \in F_0[c \mid a]$
Bew: $\Rightarrow$: denn $c \in \langle a, c^- ax, c^{-2}ax, \dots \rangle$
$\Leftarrow F_0[x, a] = ax^m bx^n cx^r \cdots = ax^m bx^{-m} x^{m+n} cx^r \cdots = ab^{x^{-m}} c^{x^{m+n}}$,
$c \in \langle A, [A, C] \rangle$, $c \in \vec{a}$

(b) $c \in F_0[c \mid A] \Rightarrow$ mod $\langle A \rangle^{\langle Ac \rangle}$ ist $c \equiv 1$, also $c = f(c) \equiv 1$, $c \in A_1$, wenn A_1 das oberste Glied der Normenkette usw: also $c \in \langle A \rangle^{\cdot\cdot\langle A_1 c \rangle} = H$, $c = ac^{-\nu} ac^\nu \dots$**???**.

(c) Gibt es $f \in A[x_1]$ mit $c = f(a_1, \dots)$, $a_\nu \in A$ und ist $d = f(d)$ mit $f \in B[x]$, so gibt es $h \in A[x]$ mit $d = h(d)$.
Bew: $\exists k \in b[x_1]$, $d = k(a'_\nu, a, x)$, $b_\mu \in B$. Setze $l(x) := f(a'_\nu, k(a, \dots x, x)$,

$x =$ Tonband
Wenn x Fixpunkt, so auch gewisse abgebildete $f \in F_0[x,a] \Rightarrow f^n(x) \in \vec{a}$ für $n > n_0$.

30/31

4. $H \leq G$. Dann $H \lhd\lhd G \Leftrightarrow H = H^0$

$\Rightarrow$ a) Sei **???** $h \to g$, dann $g \in \langle h, h^g \rangle \leq H, H^g$, **???**, $H = \langle H, g \rangle$

b) $\Rightarrow$ $h \in H$, $g \in G$ $\Rightarrow$ $g, h^g, h^{h^g}, \ldots$ endl in H, also $H \lhd\lhd G$ nach Schlüsselsatz.

Vermutung: $\langle A \rangle = {}^0A \cap A^0$, ${}^0A = \mathcal{S}_G(A)$.
Was bedeutet die vereinfachte Relation $a - b \Leftrightarrow a \to [b]$ oder $b \to a$?
Frage: $s, t \in S, s \,\mathrm{v}\, t \Rightarrow s \cdot t \in S$?
Frage: $A_i \in \mathfrak{X}G$, $\langle A_i, A_i \rangle^s \in \mathfrak{X} \to A_i^G \in \mathfrak{X}$?

31/32

$\lhd\lhd$

Frage: Genügt für $A \lhd\lhd G$ schon $\forall g \in G \exists G' \leq G : \begin{cases} A \cap G' \lhd\lhd G'? \\ g \in G' \end{cases}$

[Antw.: 2.2.80: <u>Nein</u>: für $\begin{cases} \forall A \\ \forall g \end{cases}$ gilt $A \cap \langle g \rangle \trianglelefteq \langle g \rangle$]
Tip: Untersuche $E, F \subseteq G$.

$E \,\mathrm{at}\, F := E$ attrahiert F : (=) $e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^f}}}}} \in E$ schließlich, und
oder E nat F :$\Leftrightarrow$ E wirkt normal-attraktiv auf F
:$\Leftrightarrow$ $E \,\mathrm{at}\, F$ und $E = E^e$, $F = F^e$ f. alle $e \in E$

Achtung: $E, F \subseteq G$ endlich, $E \,\mathrm{at}\, F \not\Rightarrow \langle E \rangle \lhd\lhd \langle E, F \rangle$. Sonst wäre der Subnormalisator eine Gruppe.

Frage: Genügt für $A \lhd\lhd \langle A, g \rangle$ schon $[g, a, \ldots, a] \in A$ f. $\forall a \in A$?
s. dazu Peng, Sonderdr, MZ 93, 294-298 (1966)

Kuroschs Normalketten verfeinern unter Beschränkung auf (schrittweise) Defekte $2, 3, \ldots$. Gilt bei der Endverfeinerung ein Eind.Satz?

32/33

Lokalisierung von Einbettungsfragen

Als <u>Randstelle von H in G</u> könnte man einen (minimalen) Ausschnitt $A = Z/N$ von G bezeichnen, der von H weder gedeckt noch gemieden wird. Es gilt z.B. wohl: $H \lhd\lhd G \Leftrightarrow H \neg A \lhd\lhd$ für alle solchen A. Vielleicht lohnt es, den Fall $N \leq H$ hervorzuheben

Bemerkung über Faktorisierung:
Sei $G \leq G$; $A, B, C \subseteq G$, $AB, AC \leq G$.
Dann ist $\underbrace{A\langle B, C\rangle}$ $\leq G$, also $A\langle BC\rangle = \langle ABC\rangle$.
Bew: $P :=$ Linksmult $L(D) \geq AB, AC, \langle ABC\rangle$

33/34

Mittenwald-NOTIZEN

22.12.71 - 3.4.72

1. Schur-Zassenhaus angehen mit $x^2 \cdot m(x)$
2. Bei PGr vom Grad p auf $\arg\kappa$ achten

   [Unterpunkt 3 durchgestrichen]

3. Ist $A \lhd\lhd G$, wenn A ein Erzeugendensystem E besitzt, das "attraktiv" ist $(e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{G}}}}} \subseteq A)$ [und längs einer Komp-Reihe von A gestaffelt ist, so dass die ersten paar Erzeugenden jeweils ein Glied A_i der K' Reihe erzeugen? Genügt vielleicht sogar aus jedem $A_i - A_{i-1}$ ein Element?]
   Ja: Bartels wenn die e primär
4. Ist das Erzeugnis jeder bez. Abhängigkeit vollständigen Teilmenge einer endl. Gruppe subnormal?

34/35

5. Ist die Menge aller von <u>einem</u> El't indirekt abhängigen El'te einer endl. Gruppe eine Untergr.? [Für <u>mehrere</u> El'te kann das nicht stets gelten, sonst wäre die mengentheoretische Vereinigung von subn. Ugr. eine Ugr.]
   Vorfrage:
6. Hängen in einer einfachen Gr. je zwei El'te indirekt voneinander ab? Zu untersuchen vielleicht mit Stabilitätsgruppe einer Zusammenhangskomponente des gesschilderten Abhängigkeitsgraphen.

   [Unterpunkt 7 durchgestrichen]

7. In einer endlichen Gruppe G ist die Ugr. A genau dann subnormal, wenn aus $a \in A$ und $b \in G$, b konjugiert zu a in $\langle a, b\rangle$ stets folgt $b \in A$.
8. Nach Topologieen suchen, in denen $aba^{-1}b^{-1}$ (oder $a^{-1}ba$) stetig ist.

35/36

29.1.72

Konjugiertheit maximaler Untergruppen

1. Ist $\{G_\lambda\}$ eine Normalreihe von G, $A \lessdot G$, so deckt A alle G^λ bis auf genau eines (G^j etwa)

2. Sei $\{G_\lambda\}$ Hauptreihe. Ist $A\neg G^j$ nicht $= 1$, so ist $A = \mathcal{N}_G(\overbrace{A \neq G^j}^{A^j})$ (was zu Konj.Krit $A \underset{G}{=} B$ führt) und $H \leq G$, dann $H \leq A \Leftrightarrow Aj^H = A^j$.

3. Vor 2 ist sicher erfüllt, wenn man eine HR durch A_G wählt, etwa $G_j = A_G$, und G_{j-1} so, dass $A \cap G_{j-1} \neq G_j$, dh dass A nicht G^j meidet. Dann ist überdies $\operatorname{Ztr} G^j = 1$.
[Randbemerkung :] Geht das denn immer?

4. Entsprechendes gilt für Gruppen mit Operatoren.

36/37

13.2.72

Komplemente

Grundlagen Vorl. GrTh 1971/72 §32-33

(1) Ist $A \leq G$, $|G : A| = n$, $A_0 \trianglelefteq A$, A/A_0 abelsch, so wirkt G von rechts, $\mathcal{N}(A)$ von links auf $\mathfrak{V} := \{V \mid V \subseteq G, Ax \cap V = 1 \ \forall x \in G\}$, d.h. $\mathcal{N}(A) \times G$ wirkt auf $\mathfrak{V}$.

(1a) [Ist noch $(x \mapsto x^n) \in \operatorname{Aut}(A \mid A_0)$, so] [h:] stets [:h] definiert
$V \sim W \cong \prod_{A_v = A_w}(vw^-) \in A_0$
eine Äquivalenz, die mit den Wirkungen verträglich ist, und stets
$\forall v, w \exists_1 A_0 a : W \sim aV$, d.h. $A/A_0 \underset{\text{reg}}{\overset{\text{wirkt}}{\to}} \widetilde{\mathfrak{V}}$.

$\mathcal{N}(A) \times G$ wirkt auf $\widetilde{V}$. $\boxed{\text{NB: } \overset{n}{\times} \text{ wirkt reg auf } \mathfrak{V}.}$

(2) Vor 1, 1a. Dann $g \mapsto a$ $(Vg \sim aV)$ ist Homom. $G \to A/A_0$.

(2a) Allgemein: Die Suppl./ Komp. von A sind die Pkt. Stabilisatoren G_α zu G-Räumen, auf denen $A \left\{\begin{smallmatrix}\text{tra}\\ \text{reg}\end{smallmatrix}\right\}$ wirkt; der Schnitt ist A_α.

(3) Enthält A_0 die Fokaluntergruppe von A mit G, so ist $a^- Va \sim V$ $(\forall a \in A\ \forall V \in \mathfrak{V})$; daher wirkt dann A von <u>rechts</u> transitiv auf $\widetilde{\mathfrak{V}}$, und G_V ist Suppl. zu A mit Schnitt A_0; sowie $G_V = G_W \ \ \forall\, W \in \mathfrak{V}$, daher $G_V \trianglelefteq G$ = Fokalsatz in schärferer Fassung: $\exists_1 G_0 : \begin{cases} AG_0 = G \\ A \cap G_0 = A_0 \end{cases}$.

Was passiert, wenn A/A_0 <u>durch Konjugation</u> regulär auf $\widetilde{\mathfrak{V}}$ wirkt?

(4) $G_{\widetilde{V}}$ ist invariant unter allen $\sigma \in \operatorname{Aut} G$, für die $V^\sigma \sim V$ ist und $A^\sigma = A$, $A_0^\sigma = A_0$. Hängt diese Methode mit Eckmann-Transfer zusammen?

(5) Kann man Gaschütz Satz so beweisen? Schur-Zass. auf Ω-Gruppen übertragen.

37/38

Komplemente, Forts.

1. Ein Supplement B zu $A \leq G$ mit $B \cap A = A_0$ heißt zweckmäßig ein Komplement zu $A : A_0$. Also: $B \in \operatorname{Kpl} A : A_0 :\Leftrightarrow AB = G,\ A \cap B = A_0$.

2. Die $B \in \operatorname{Kpl} A : A_0$ sind die Stabilisatoren G_α in denjenigen G-Räumen, auf die A transitiv wirkt mit $A_\alpha = A_0$.

3. Für Verlagerung genügt es, zu jedem bzw. zu einem $a \in A$ ein V zu finden mit $V^a \sim V$.

38/39

[Seite 39 leer]

39/40

Gruppen vom Grad p

Anläßlich Lektüre von Camerous Entwurf 29.2.72:

1. Haben $$\left.\begin{array}{rcl} K_1K_2 &=& u_3K_3^T + x_3J \\ K_1K_1^T &=& j_1I + \lambda_1 J \end{array}\right\}\ \&\ \text{Zyk}\quad \begin{array}{l} (C \text{ hat } -n_3) \\ (C \text{ hat } n_1 \text{ statt } j_1) \end{array}$$

   hieraus eine elegante Herleitung von $j_\nu = u_{\nu-1}u_{\nu+1} \mod J$ ist

   $$K_1^T K_1 K_2 \equiv j_1 K_2, \quad \& \equiv u_3 K_1^T K_3^J \equiv u_3 u_2 K_2$$

   Also $j_1 = u_2u_3$; $k_1^2 = j_1 + \lambda_1 p$, $k_1 = j_1 + \lambda_1$. Die K_ν sind paarweise vertauschbar, auch mit K_ρ^T.

2. Es wird $K_1K_2K_3 = u_3K_3^TK_3 + k_3x_3J$, also $= n_3j_3I + (u_3\lambda_3 + k_3x_3)J$, also $n_1j_1 = \ldots$ (Zykl.)

   $$\begin{array}{lrcl} \text{aber auch} & u_3\lambda_3 + k_3x_3 &=& \ldots \text{ (Zykl.)} \\ \text{als auch} & \underline{+u_3j_3} &\underline{=}& \underline{\ldots} \\ & n_3k_3 + k_3x_3 && \end{array}$$

   Daher $k_1(x_1 + n_1) = \cdots = \ldots$ (auch bei C). Aufstellen aller Symmetrieen, die durch $K_i \to J - K_i$ entstehen.

3. <u>Weitere Gedanken:</u> Besser $D_\nu = K_\nu - \frac{k_\nu}{p} J_\nu$ betrachten: $D_\nu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 0$.

   $D_1D_2 = u_3D_3^T$, $D_1D_1^T = j_1I_0$ wo $I_0 = I - \frac{1}{p}J$.

4. Die K_i, K_ρ^T weiter in 01-Matrizen zerlegen (in 16 Stück?) vermöge $X \circ Y := (x_{\alpha\beta}y_{\alpha\beta})$ bilde $K_1 \circ K_2 \circ K_3^T$ usw.

40/41

5. Ist $2^e \| p-1$, so ist $2^{e-1} | \#$ Primid.faktoren von K (mit Vielfachheiten)

6. Man sollte K nach Potenzen von $\delta = 1-\varepsilon$ entw. ($\varepsilon^p = 1$). Daher nützt $\overline{\delta} = 1 - \varepsilon^{p-1} = 1-(1-\delta)^{p-1} = -\delta - \delta^2 - \cdots - \delta^{p-1}$. Setzt man $\kappa = k(1 + a\delta + b\delta^2 + \cdots)$, $\overline{\delta}^2 \equiv \delta^2(\delta^3)$, so wird wegen $\kappa\overline{\kappa} \equiv k^2 \ (p, \delta^3)$

$$(1 + a\delta + b\delta^2)(1 - a\delta - a\delta^2 + b\delta^2) \equiv 1$$

(vgl. δ^2):

$$\begin{aligned} b - a - a^2 + b &\equiv 0 \quad (p) \\ b &\equiv \frac{a^2+a}{2} \quad (p) \end{aligned}$$

$K_1K_2 = u_3\overline{K_3}$ liefert $(1+a_1\delta+b_1\delta^2)(1+a_2\delta+b_2\delta^2) \equiv 1 - a_3\delta + (b_3-a_3)\delta^2$, also $a_1 + a_2 + a_3 \equiv 0 \ (p)$ (Rest nichts neues)
[nämlich $b_1 + b_2 + a_1a_2 \equiv b_3 - a_3 \equiv \frac{a_3^2 - a_3}{2}$,
$a_1^2 + \underline{a_1} + a_2^2 + \underline{a_2} + 2a_1a_2 \equiv a_3^2 - \underline{a_3}$]
Vgl. δ^3 in $(1+a_1\delta+b_1\delta^2+c_1\delta^3)(1+a_2\delta+b_2\delta^2+a_2\delta^3) = 1 + a_3(-\delta-\delta^2-\delta^3) + b_3(\delta^2+2\delta^3) - c_3\delta^3$, $c_1 + c_3 + b_1a_2 + a_1b_2 + a_2 \equiv -a_3 + 2b_3 - c_3 = a_3^2 - c_3$.
besser: wenden

41/42

noch Grad p

1. $(1 + a_1\delta + b_1\delta^2 + c_1\delta^3)(1 + a_2\delta + b_2\delta^2 + c_2\delta^3)(1 + a_3\delta + b_3\delta^2 + c_3\delta^3) \equiv 1$

$$c_1 + c_2 + c_3 + b_1a_2 + b_1a_3 + b_2a_1 + b_2a_3 + b_2a_1 + b_2a_3 + a_1a_2a_3 \equiv 0$$

$$c_1 + c_2 + c_3 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 + a_1a_2a_3 \equiv 0 \quad (p)$$

2. Wenn K_1, K_2 den Körper F vom Grad f erzeugen, so ist $\frac{p-1}{f} \equiv 1 \ (2)^*$ und $K_3 \in F$ und man kann annehmen, dass die Untergruppe der Ordnung f im p-Sylow-Norm. vorkommt.

   *

3. Kein $\mathfrak{q} \mid j$ ist $= \overline{\mathfrak{q}}$, daher gibts $z \cdot 2^e$ Konjugierte zu $\mathfrak{q}$, also Grad $F \equiv 0$ (2^q), und Grad $\mathfrak{q}$ ungerade, daher $q^{\text{ungerade}} \equiv 1 \ (p)$: q ist 2^e-ter Potenzrest mod p.

4. Die K_ν als Funktionen zweier Variablen über $\mathbb{F}_p$ auffassen und durch Polynome darstellen.

42/43

noch Grad p

1. Um alle "Invarianten" für p aufzustellen, braucht man nur zu jedem primären Teiler q von $p-1$ ein $\overline{q} \mod r = \frac{p-1}{q}$ zu bestimmen, für das $q\overline{q} \equiv 1 \mod r$. Zu dem Teiler $\prod q_i$ von $p-1$ gehört dann $\prod \overline{q_i}$, reduziert mod $\frac{p-1}{\prod q_i}$.

2. Zu je zwei Partitionen der Menge der primären Teiler von $p-1$ in je zwei Teilmengen gehört eine eindeutig bestimmte dritte: Zu $rstu$ $\left(\begin{smallmatrix} r & s \\ t & u \end{smallmatrix}\right)$ und $rt \cdot su$ gehört $su \cdot st$. Wie hängen die zugehörigen drei Invarianten zusammen? Bilden die Invarianten bezüglich dieser Verknüpfung (vorausgesetzt, dass jede Invariante bei nur einer Partition auftritt) eine bemerkenswerte algebraische Struktur?

43/44

1. Abschätzung der w_i in $K_1K_2 = w_3K_3^T + x_3J$:

$$(w_1w_2w_3)^2 = j_1j_2j_3 \leq \frac{p+1}{4} \cdot \frac{p-1}{4}\frac{p-3}{4}$$

$\uparrow$ bei Cameron: $u_1 \dots$

$|w_1w_2w_3| \leq \frac{p^{\frac{3}{2}}}{8}$

2. Schreibt man $k_1k_2 = u_3k_3 + x_3p$ usw. (wie Cam.), so führt Elimination von u_3 aus $k_1(p-k_1)k_2(p-k_2) = (p-1)u_3^2k_3(p-k_3)$ zu $k_1k_2 \equiv k_1+k_2-b_3$, wo $b_3 = a_3+x_3$, $a_3 = u_3+x_3$, genauer: $k_1k_2 = k_1+k_2-b_3+p(b_3-y_3-1)$, wobei (die rechte Seite ist klein) $\mathbb{Z} \ni y_3 = \frac{(p-1)a_3x_3}{k_1k_2}$,
also $k_1k_2y_3 = (p-1)a_3x_3$, $k_1k_2k_3y_3 = (p-1)Ax_3$, wo $A = a_1k_1 = a_2k_2 = a_3k_3$ siehe 3

3. Mit $a_i = u_i + x_i$ gilt auch $k_ia_i = A$ unabhä.
Bew: $K_1K_2 = a_3K_3^T + x_3L_3^T$ wo $K_3 + L_3 = J$, $K_1K_2K_3 = a_3K_3K_3^T + x_3K_3L_3^T$. Spur: sym $= a_3k_3p + 0$. Also $A = \frac{1}{p} \cdot \operatorname{Spur} K_1K_2K_3$.

44/45

p und Verallg.

1. Sind S_1, S_2 zwei $n \times n$-Matrizen, G_1, G_2 zwei Gruppen von $n \times n$-Permutationsmatrizen derart, dass $S_i^{-1}G_1S \leq \{\text{Perm.Matr.}\}$, und ist Rang$(\mathbb{C}S_1 + \mathbb{C}S_2 + \mathbb{C}J) = 3$, so hat $G_1 \cap G_2$, falls transitiv, <u>wohl</u> mindestens 3 Klassen konj. Untergruppen des Index n.

2. Wenn also G_1, G_2 zwei Gruppen von Grad p sind, in denen beiden $(12 \cdots p)$ vorkommt, und lässt sich G_i durch S_i in Permutationsmatrizen transformieren, so ist $G_1 \cap G_2$ wohl auflösbar oder S_2 lin abh von S_1 und J, falls meine Vermutung über die Zahl der Klassen konj. Ugr. vom Index p zutrifft.

3. Wenn insbesondere $N \in \mathcal{N}_{\mathrm{Gr}}\langle(12\cdots p)\rangle$ und G_1 durch S nach PermMatr hinein transformiert wird, so ist wohl $G_1 \cap G_1^N$ auflösbar oder $SS^N J$ lin abh. (falls meine Vermutung zutrifft).

   Frage: Potenzrestcharakter von K?

4. Zu jeder der Verkettungsmatrizen K_i sind k_i, l_i 2^{e-1}-ter Potreste $\mod p$ wenn $2^e \mid p$. Denn $k_i^2 = j_i = 2^e$-ter Rest. Wenn $j = \alpha s + \beta t$, $st = p - 1$, so sind s, t 2^{e-1}-te Reste.

45/46

Seite 46 leer

46/47

Teilerfremde Wirkung: Fixpunkte

9.4.72

Die endliche Gruppe A wirke auf G. Sei $H \leq G$, $(|G| \leq \infty)$, $(|H|, |A|) = 1$, $H = H^A$, $Hg_0 = (Hg_0)^A$. Dann ist # Fixp. A in Hg_0 = # Fixp A in H (und daher hat A auf Hg_0 dieselben Bahnlängen wie auf H).
Bew: Das semidirekte Produkt $H \curlyvee A$ wirkt auf Hg_0 vermöge $x^{(h,a)} := h^- x^a$ oder ähnlich. Der Stabilisator von g_0 hat Ordnung $|A|$, ist also zu A nach S-Z-F-Th in $H \curlyvee A$ konjugiert, also hat auch A einen Fixpunkt. (Schon ähnlich bei Glauberman?)
Vermutung: Meine Fixpunktformeln gelten auch für die Anzahl der Fixpunkte von A in $G : H$, wenn G und H von A fest gelassen werden und $(|G|, |A|) = 1$ ist. Ebenso für die Anz. der Fpe in Hg_0 wenn das bei A fest ist.

47/48

[Seite 48 leer]

48/49

Monomiale p-Gruppen G

10.4.72

G transitiv, von Grad $\not\equiv 0 \mod p$.

1. Die Koeff seien in C_p. Genau dann läßt sich der Normalteiler der Det 1 von G auf Permutationsgestalt transformieren, wenn alle seine Diagonalfaktoren = 1 sind.

(1′) Dann kriegen alle $g \in G$ die Gestalt Skalar · Permut.

2. Vermutung: Hat die Koeff-Gr die Ord p^α, so kann man G genau dann auf Skalar · Permut. transformieren, wenn G eine Untergruppe H ("normal") vom Index p^α besitzt, in der alle Diagonalfaktoren = 1 sind.

49/50

[Seite 50 leer]

50/51

Komplemente von Hall-Ausschnitten

31.4.72
Def: $H_1 \le H \le G$.

a) Nenne $H : H_1 \in \mathcal{H}(G)$, wenn $(|G : H|, |H : H_1|) = 1$

b) $K \in \mathrm{Kpl}_G(H : H_1) :\Leftrightarrow K \le G$, $KH = G$, $K \cap H = H_1$. $\Leftrightarrow K$ deckt $G : H$ und H_1, K meidet $H : H_1$.

(1) $H : H_1 \in \mathcal{H}(G)$, $K_1, K_2 \in \mathcal{K}_G(H : H_1)$, $K_1K_2 = K_2K_1 \Rightarrow K_1 = K_2$.
Bew: $|K_1K_2 : K_1| \mid |G : K_1| = |H : H_1|$, andererseits $= |K_2 : K_1 \cap K_2| \mid |K_2 : H_1| = |K_2 : H \cap K_2| = |HK_2 : H| = |G : H|$, also $|K_1K_2 : K_1| = 1$.

(2) Wenn zu einem Hall-Ausschnitt von G ein (sub?)normales Komplement in G existiert, so ist es das einzige Komplement.

(3) Ansatz: Durch Kombination der Links- und Rechtswirkung auf der Menge $\mathcal{R}$ der Vertretersysteme zu $G : H$ weitere G-Räume finden, auf denen H transitiv wirkt.

51/52

Verlagerungssatz analog zu Gaschütz Verallg. von Schur-Zass.:

Sei $H^* \underset{i}{\lhd} H \le G_\rho \underset{n_\rho}{\le} G$; $\forall_\rho \;\; \exists$ nKpl G^*_ρ von H/H^* in G_ρ; sei $(i, n_1, \dots, n_i) = 1$, $h, h^g \in G_\rho \Rightarrow h \underset{G^*_\rho}{\equiv} h^g$. Dann $\exists$ nKpl H/H^* in G.

Bew: I H/H^* abel.
$\mathcal{R}_\rho = \{R \mid R \subseteq G, |R \cap G_\rho x| = 1\}$
$\frac{R}{S} = \prod hH^*$, wobei $r \in R$, $s \in S$, $r = hg^*_\rho s$
$\frac{R}{S}\frac{S}{T} = \frac{R}{T}$, da $r = hg^*_\rho s$, $s = h'g^{*\prime}_\rho t \Rightarrow r = hh'{g^*_\rho}^{h'} g'_\rho t$

Wähle R so, dass aus H-konj Nebenklassen $G_\rho x$ auch H-konjugierte Vertreter genommen werden. Ist dann $r \in R$ und $G_\rho r^h = G_\rho r$, so $r^h = h'g_\rho r$, $r^h r^- = h'g_\rho$, $h^- r^h r^- = h'g_\rho$, $rhr^- = hh'g_\rho$, $h'g_\rho \in G^*_\rho, h' \in H^*$.

Kurz: $V_{G \to G_\rho/G^*_\rho}(h) \xrightarrow{?} H^* h^{n_\rho}$.
Setze $\varphi(g) = \prod\limits_\rho (V_{G \to G_\rho/G^*_\rho}(g))^{k_\rho}$ mit $\sum n_\rho k_\rho = 1$. Dann $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, H/H^*)$ und $\varphi(h) = hH^*$.

52/53

Zum Satz über Frobeniusgruppen

24.9.72 Eine Untergruppe H von G erfüllt genau dann die Bedingung $H \cap H^x = 1$ für $x \notin H$, wenn $G \backslash H$ eine freie H-Links-, H-Rechtsmenge ist.

53/54

[Seite 54 leer]

54/55

Zum Satz von Hirsch

Hirsch: $H \leq P \in p$-Syl G, $|G| \equiv 1 \mod 2 \Rightarrow \#\{P^g \mid P^g \geq H\} \equiv 1 \mod 2$.
Bew durch Sortieren der $P^g \geq H$ nach ihrem Durchschnitt mit $\mathcal{N}(H)$.
Bemerkung:

1. Statt $|G|$ ungerade genügt $|G : P|$ ungerade.

2. Statt $P \in p$-Syl G genügt wohl P nilpotente Hallgruppe.

3. Vermutung: Ist jeder Primteiler von $|G : P| \equiv 1 \mod k$, so ist $\#\{P^g \mid P^g \geq H\} \equiv 1 \mod k$.

55/56

Seite 56 leer

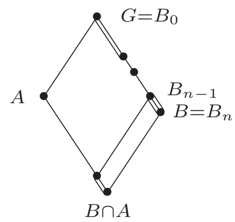
56/57

Norm- & Zentralisatorsätze

1. G Wieland 2.6.72: $A, B \lhd\lhd G$ (endl.), $A' = A$ einköpfig, $A \not\leq B$,
   Rumpf $A = Z(A) \Rightarrow (A, B) = 1$
   kommt mir bekannt vor, vielleicht auf Zettel. Steht aber nicht im Skriptum, von Wd selbstdig gefunden. Selinka fragen?

2. $|G| \leq \infty$. Seien A und $B = B' \trianglelefteq\trianglelefteq G$. Zwischen A und $A \cap B$ kein perfekter Subnormalteiler außer 1 (kurz: A antiperfekt). Dann ist $A \leq \mathcal{N}(B)$.

   Bew: $A \mathrm{v} B$. OBdA $G = AB$. Wäre $\mathrm{def}_G B = n > 1$, so wäre $(B_{n-1} \cap A)/(B \cap A)$ perfekt und $\neq 1$, Wid.

   Frage: Genügt es schon, wenn kein <u>Normal</u>-Faktor von A perfekt ist

   4.6.72

3. Analoges muß gelten, wenn $\mathfrak{K}$ eine geeignet abgeschlossene Menge von Köpfen ist, für A's, die keinen subnormalen $\mathfrak{K}$-Faktor enthalten, und B's, die nur $\mathfrak{K}$-Köpfe haben.

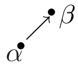
57/58

Seite 58 leer

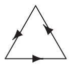
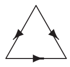
58/59

3-homogene Gr.

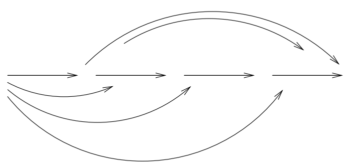
sind 2-tra (wenn $n \geq 4$)
Bew:

1. G ist 2-hom. Ann: nicht 2-tra
2. Wähle  Wende G darauf an.

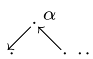
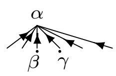
   Wegen (1) erhält jede Kante des vollst. (ung) Graphen auf Ω einen Pfeil. Ist G nicht tra, so nur einen Pfeil.

3. Falls  vorkommt, sind alle Dreiecke zyklisch gepfeilt. Also wenn $n \geq 4$.
4. also tritt  auf, und nur solche gibt Ordnung jedes Dreiecks 

   Jedes k-Tupel ist dann geordnet:

   Bew induktiv: α

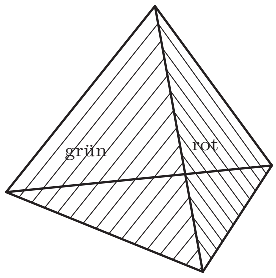
   $\ldots\ldots$ sei $\to$ geordnet von links nach rechts, dh jeder Pfeil geht von links nach rechts. Dann kommt nicht  vor, also entw $\swarrow\downarrow\searrow$ oder $\nearrow\uparrow\nwarrow$ oder  Im 1. Fall setze α nach links, im zweiten nach rechts, im 3. zwischen β und γ.

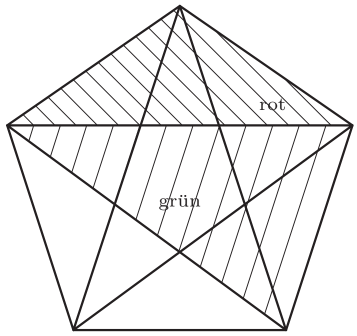
5. Also ist Ω geordnet, $G = \text{id}$ Wid.

59/60

Erweiterung auf 4-hom. G:

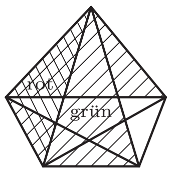
Jedes Dreieck enthält, wenn es etwa 3 Klassen von Tripeln gibt, genau eine der Farben 1 2 3: in G-invarianter Weise. Alle drei kommen vor
OBdA hat jeder Tetraeder 1 2 $\underbrace{3\ 3}_{\text{weiß}}$

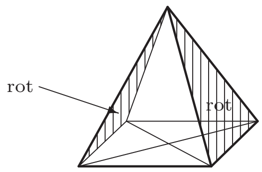




In Pentade: $\exists$ 5 rote Flächen, keine zwei Kante[n] gemeinsam
$\exists$ 5 grüne Flächen, keine 2 haben Kanten gemeinsam. Pentade hat nur 10 Flächen, sind alle $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{rot}}{\text{grün}}$ Wid.
Wenn 2 Farben $1, 2$, so Tetraeder 1 1 1 2 (I) oder 1 1 2 2 (II) oBdA

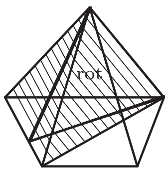
I: Keine zwei Dreiecke mit Farbe 2 haben Kanten gemeinsam
$s := 5$





$\#\{\text{rot } \subset \text{Tetr}\} = 5 \cdot 1$ jedes Dreieck liegt auf 2 **???** , also $5 \cdot 1 = 2 \cdot f$ Wid,
$f = \#\text{Tetr} = \text{fast rot}$

II: $s = 5$: f_i Flächen G_i $5 \cdot 2 = \{i \in T\} = f_2 \cdot 2$, $f_2 = 5 = f_1$.

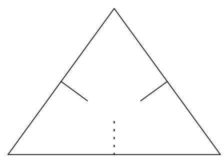


60/61

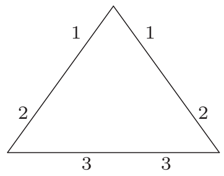
Frage: Vielleicht ist eine nur t-transitive Gruppe schon bestimmt durch die von ihr induzierten partiellen Selbstabbildungen auf einem $\Lambda \subseteq \Omega$ mit $|\Lambda| = f(t)$, $4 \leq |G| \leqq \infty$:

1. G 3-hom, $\neq$ 2-tra $\Rightarrow$ G 2-o-tra für eine Ordnung o. Denn G 2-ho, erklärt $\nearrow$,  kommt vor, erklärt inv. Ordnung auf Ω.
2. G k-ho, $k \geq 3$, G nicht 2-tra $\Rightarrow$ G k-o-hom, denn $a_1 < \cdots < a_k$ auf $b_1 < \cdots < b_{k-1}$ global, gibt richtige Zuord.

3. G 4-hom, 2-tra, nicht 3-tra $\Rightarrow p\ q\ r \cdots u \in F$, $|F| \leq 3$.



$|F| = 3$



$\ni \substack{1\\2} \mid \substack{1\\2} \quad \substack{1\\2} \mid \substack{2\\1} \quad \substack{1\\2} \mid \substack{3\\3} \quad \substack{3\\3} \mid \substack{3\\3}.$

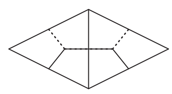
??? z.B. $\substack{3\\3} \mid$

kommt 4 mal vor im Tetr ($1\times$ je Fläche) also $\substack{3\\3} \mid \substack{3\\3}$ <u>nur einmal</u>, $\substack{3\\3} \mid \substack{1\\2}$ zweimal, $\substack{1\\2} \mid$ kommt $8\times$ vor, also $\substack{1\\2} \mid \substack{1\\2}$ und $\substack{1\\2} \mid \substack{2\\1}$ zusammen $6\times$. Also G_4 hat Farbe 1 2 2,

⋮ rot

| blau

$\exists$



also $\exists \downarrow$

61/62

P-Gr.

Sei Φ ein Raum, auf dem sowohl G wie H wirken, $\varphi \in \Phi$. Nenne $G \underset{\varphi}{\sim} H$, wenn $\varphi^G = \varphi^H$, dh. G tra φ^H. Für $H = [\mathrm{Sym}\,\Omega]^k$ ist $G \underset{\varphi}{\sim} H \Leftrightarrow G$ k-transitiv.

Frage: Welche 2-Relationen Δ können Bahnen eines $G \leq S^\Omega$ auf Ω^2 sein? dh Wann $\mathcal{N}_G(\Delta)$ tra Δ $(\Delta \subseteq \Omega \times \Omega)$?

62/63

$|G_a|$ in prim PGr. - Jordan-Hölder

19.8.72 Idee: Auf- und absteigende $ABA\ldots$ Ketten in $A := G_x$, $B = G_\beta$ vergleichen: Die absteigenden steigen anfangs langsam ab, die aufsteigenden langsam auf. Vielleicht durch Betrachtung der halben max. Schrittlänge etwas zu holen. Gibt es Jord.-Hölder-Satz für solche gemischten Normalketten $A \lhd N_1 \lhd N_2 \lhd$ mit $N_{2i} \lhd B_1 N_{2i-1} \lhd A$?
Gibt es J-H-Satz für die Ketten $A \rhd N_1 \rhd N_2 \rhd \cdots$ wobei $A \leq G \geq B$ und $N_i = N_i^B$, $i = 1, 2, \ldots$?

16.8. Kann man die Methode von Sims auf Dreiecksketten anstatt Pfeilketten anwenden?

63/64

27.8.72

Verlagerung

in einen Faktor der Ord 2. Ist $t \in G$, $1 \neq t$, $t^2 = 1$, so ist

$$\underset{\chi_-}{\overset{\text{mon Char}}{|}} = \underset{\pi}{\overset{\binom{\text{pos}}{\text{neg}}\text{ Diag - El'te}}{|}} - \overset{\nu}{\underset{\text{Anz. d. 2-Zyklen}}{|}}$$

$$\begin{aligned} \text{PermChar } \underline{\chi_+} &\underline{= \pi + \nu} \\ \nu &= \frac{\chi_+ - \chi_-}{2} \\ \underline{\mathrm{Verl}(t) = (-1)^\nu} &\underline{= i^{2\nu} = i^{\chi_+ - \chi_-}} \quad (i^2 = 1) \\ A_- &= A - A_+ \end{aligned}$$

Andere Schreibweisen:
Verlagere nach A/A_+, Index $= 2$, $G = \sum A r^-$,
$\underline{\mathrm{Verl}(t) = (-1)^\nu}$, $\nu = \#\{r^- \mid t \in (A_-)^{r^-}\} = \frac{1}{|A|}\#\{g \mid t^g \in A_-\}$

$\boxed{\frac{|G:A|}{|t^G|}k = \nu = \frac{|C_G(t)|}{|A|}k;\ k := |t^G \cap A_-| = |(t,g)| \in A_-| \text{ wenn } t \in N}$

Wenn A eine 2-SylGruppe N von $C_G(t)$ enthält, so ist $\nu \underset{2}{\sim} \frac{k}{|t^A|}$; dh. ν gerade $\Leftrightarrow k$ durch höhere 2-Poten teilbar als $|t^A|$
Hinr für ν ung ist $0 < k < 2|t^A|$.
Aufgabe: Erweiterung auf beliebige primäre Elte, wenn $\mathrm{Ord}\, t = p^2$, so kommt noch $C_g(t)$ ins Spiel.

64/65

Subnormalität

27.9.72

(1) Def: Seien $A, B \subseteq G \in \mathfrak{G}$. $B \to A$ ("A zieht B an") heißt: Für jedes endliche $A' \subseteq A$ und jedes $b \in B$ gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $b(\circ A')^n \subseteq A$. Damit gilt:

(1′) $B_i \to A \Rightarrow \bigcup B_i \to A$

(2) Sei A eine $\mathrm{Sym}\,3 \leq G$, $a \in A$ nicht $\lhd\lhd\ G$, $a^2 = 1 \neq a$. a ziehe G nach A: $g(\circ a)^n \in A$. Sei D die Gr d Ord 3 in A. Dann zeigt die Determinante auf $\{D^G\}$: G enthält einen Normalteiler des Index 2, der aus den Produkten einer geraden Anzahl von a^{g_i} besteht.
$g \in G \Rightarrow g \circ a \left\{ \begin{array}{l} \in M \text{ oder} \\ \text{hat Ord } 2 \therefore \end{array} \right.$. Fortsetzg: 66(1)

(3) Sei $|G| < \infty$; $A \leq G$, aus $S \subseteq A^S$ folge stets $S \subseteq A$. Damit ist $A \lhd\lhd G$.
Bew: $S := G(*A)^n$, $S = S * A \subseteq A^S$, $G(*A)^n = S \subseteq A$.

(3′) $|G| < \infty$, $A \leq G$. Aus $a \in A$, $S \subseteq G$ und $S = a^S$ folge $S \subseteq A$. Dann ist $A \lhd\lhd G$.
Bew: $S =$ Periode von $g(*a)^n$

65/66

[gesamte Seite durchgestrichen mit Anmerkung „überholt durch Bartels":]

Satz über $G(\circ a)^n \subseteq A$

28.8.72

(1) Sei $a \in G$, $\operatorname{Ord} a = 2$, a ziehe G in eine Diedergruppe A der Ord $2p$ (dh $G(*a)^n \leq A$). Dann ist $A \lhd\lhd G$.
Bew: Sonst $\exists_1 M \cdot\!\geq A$. $\exists\ x \underset{G}{\sim} a$ mit $\begin{cases} x \notin M, \\ a^x \in M \end{cases}$ also $x^2 = 1$.

Dann $\langle a^x \rangle \lhd\lhd M$, zentralisiert den Normalteiler D der Ord p von A; also $D \leq \mathcal{C}(a^x) \leq \mathcal{N}(a^x)$, aber da a^x G nach A^x zieht, das **???** in M^x liegt, folgt $D \leq M^x$. Wegen $x^2 = 1$ ist $a \in M^x$, also $A = \langle a, D \rangle \leq M^x$ Wid.

Ebenso dürfte folgen:

(2) Sei $A_0 \subseteq A \leq G$, $A = \langle A_0 \rangle^A$, A_0 ziehe G nach A. Für jedes B mit $A_0 \subset B \leq A$ sei A_0 intravariant in B. Dann ist $A \lhd\lhd G$.

66/67

Vor: $\underline{G(\circ a)^n \subseteq A}$, $A \ntriangleleft\!\lhd G$ (min. Gegenb.)

(1) $\exists L \lessdot G$, $L \neq M$, $B := G^{\cdot\cdot L}$ max. Dann $(B \leq R \lessdot G, R \neq A) \Rightarrow B \lhd\lhd R$, $B \leq A$. Denn $a \in L \Rightarrow a^{\cdot\cdot L} \leq A$

(2) $x \in \mathcal{N}_G(B) \Rightarrow x \in \mathcal{N}_G(A)$.
Bew: B ist nur in M nicht subnor., also $M^x = M$, $x \in M$, $A^x \lhd\lhd M$, $a^{x^-} \in B \leq A$, $a \in A \cap A^x \lhd\lhd M$, $A = a^{\cdot\cdot M}$, $A = A^x$. Z.B. $\operatorname{soc} L \leq \mathcal{N}(A)$

(3) $x \notin M$, $B^x \leq M \Rightarrow B^x \lhd\lhd M$.

(4) $B \leq H \leq K \lessdot G$, $\neg B \lhd\lhd H \Rightarrow K = M$, $\mathcal{N}H \leq M$.

(5) $G > B = \langle a \rangle^B \leq K \lessdot G$, $|B|^{\cdot\cdot K} = |A| \Rightarrow K = M$

(5′) $H < G$, $B = a^{\cdot\cdot H} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{soc} H \leq \mathcal{N}(A) \\ \mathcal{N}_G(B) \leq \mathcal{N}(A) \end{cases}$
Bew: $C = \langle H(\circ a)^n \rangle = A$, $x \in \mathcal{N}_G(C)$ läßt A fest als einzige subnormale Hülle $C^{\cdot\cdot X}$ der Ord $|A|$ für $C \leq X < G$.
NB: insbesondere, wenn $C^s = C$, so zieht a^s ganz G nach A.

(6) $G > B = (a^B) \Rightarrow \mathcal{N}(B) \leq \mathcal{N}(A)$

67/68

$$G(\circ E)^n \leq A$$

[*Unterpunkt 1. eingeklammert*]

1. Vermutung: Wenn jede Schicht in einer Kompositionsreihe von A ein G nach A ziehendes Element enthält, so ist $A \lhd\lhd G$. ?
   Bew: Ind nach Jordanlänge führt auf Fall wo A einfach? Bew. unvollständig

1a. Man kann vermutlich annehmen, dass G keinen abelschen Normalteiler hat.

2. Frage: Für alle $x, y \in G$ sei $A^x, B^y \lhd\lhd \langle A^x, B^y \rangle$. Kann man dann Subnormalteiler von G konstruieren? Kann G einfach sein? Vielleicht gilt: Ist stets $\langle a^x \rangle, \langle b^y \rangle \lhd\lhd \langle a^x, b^y \rangle$, so ist $A^G \cap B^G$ nilpotent; oder $\langle a^G \rangle / \langle a^G, b^G \rangle \in \mathfrak{N}$. siehe 69.7

3. Ist das Erzeugnis von zwei subnormalen Liegruppen eine Liegruppe?

4. Frage: Ist die subn. Hülle $\langle a \rangle^{\cdot\cdot G} = \langle \langle a \rangle^{\cdot\cdot \langle a,x \rangle} \mid x \in G \rangle$? Allg: ist für $A \subseteq G$ stets $\langle A^{\cdot\cdot \langle A,x \rangle} \mid x \in G \rangle \lhd\lhd G$?

5. Bem: Statt eines totalen Erzeugendensystems

68/69

   braucht man wohl nur eine Menge $E \subseteq G$ derart, dass jede (subnormale ?!) Untergruppe $A \leq G$ die normale Hülle von $A \cap E$ in A ist.

6. Satz (Sept 72): Genau dann ist $A \lhd\lhd G$,
   wenn A vertauschbar, für jedes $\substack{a \in A \\ g \in G}$ mit $A^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{a^g}}}}}$ $\}$ $|G|$-mal
   Bew: Dann ist schließlich $c^{a^{\cdot^{\cdot^{a^g}}}} \in A$.

7. Aus $A, B^g \lhd\lhd \langle A, B^g \rangle$ für jedes $g \in G$ folgt $A \cap B \lhd\lhd G$.
   Bew: $d \in A \cap B$, $g \in G \Rightarrow d^{d^{\cdot^{\cdot^{g}}}} = a^{a^{\cdot^{\cdot^{c}}}}$, wo $c := d^g \in \langle A, B^g \rangle$, also $\ldots \in A$, ebenso $\in B$.
   Das enthält den Satz: $(\forall_g A \lhd\lhd \langle A, A^\delta \rangle) \Rightarrow A \lhd\lhd G$.

69/70

$\lhd\lhd$

1. Man sollte Kegels Problem für ein einzelnes p formulieren. Vermutung: Ist $A \leq G$ endl. und gilt ($P \in p$-Syl $G \Rightarrow A \cap P \in p$-Syl A), so ist $pA \lhd\lhd G$.

   Aufg: Nachprüfen für auflösbares A.
   Witzlos: Glw. mit Kegel, und man kann ohnehin bei Kegel oBdA annehmen, dass A einfach und perfekt ist.

2. $|G| < \infty$, $\overset{\text{besser } B}{\overset{\downarrow}{A}} \leq G$. Dann 8.10.72

$$A_{\cdot\cdot G} = \bigcap_g A_{\cdot\cdot \langle A, A^g \rangle}$$

3. $|G| \leq \infty$. $A, B \leq G$; A, B endl. p-Gruppen; $A \lhd\lhd G \Rightarrow \langle A, B \rangle$ p-Gruppe.

   Folge:

4. $|G| \leq \infty$ A endliche subnormale p-Untergr von G, B p-Gruppe in G ($|B| \leq \infty$) $\Rightarrow \langle A, B \rangle$ p-Gruppe

4′. Verallg. auf lokal endliche Untergruppen.

70/71

$\lhd\lhd$

1. $|G| \leq \infty \Rightarrow$ Jede endliche subnormale p-Gruppe $A \leq G$ liegt in jeder maximalen p-Untergruppe von G. Damit sollte Projektionssatz funktionieren.

2. Frage: Deckt jede maximale p-Gruppe in G
   jeden endlichen subnormalen p-Faktor?
   (oder sogar jeden subnormalen p-Faktor ?)

3. Frage: Ist eine geg. endliche Ugr A von G schon dann subnormal, wenn sie mit jeder endl. Ugr $B \leq G$ etwa Endliches erzeugt? Nein. Gegenbeispiel z.B. $G =$ endl. Permut. auf Ω, G lok.end., $|\Omega| = \infty$.

4. Frage: Schreibe $G \in \mathfrak{V}$ (vollstd.-Eig), wenn jede Menge $E \subseteq G$, für die aus $e \in E$, $g \in G$, $e \underset{\langle e,g \rangle}{=} g$ folgt: $g \in E$, eine subnormale Ugr von G erzeugt.
   Gilt dann $\mathcal{K}(G) \subseteq \mathfrak{V} \Rightarrow G \in \mathfrak{V}$?

   10.12.72

5. Nach lesen Entwurf Diss Selinka:
   Ist α normal-additiv (dh $A, B \lhd G \Rightarrow (AB)^\alpha = A^\alpha B^\alpha$), so folgt aus $A, B \lhd\lhd G$ stets $A_\alpha \leq \mathcal{N} B^\alpha$. Das hat S. auf der Klasse der regulären p-Gr für $\alpha = \mho_k$ in der schärferen Form $A_\alpha \leq \mathcal{C}(B^\alpha)$.

   Vor $*$ Im folgenden sei α nor-dis: $A, B \lhd G \Rightarrow (AB)^\alpha = A^\alpha B^\alpha$

6. α nor-distributiv $\Rightarrow A$ sn $G \Rightarrow A^{\alpha G} = A^{G\alpha}$
Bew:

(1) $A \lhd G \Rightarrow A^\alpha \lhd G \Rightarrow A^{\alpha G} = A^\alpha = A^{G\alpha}$

(2) $A \ntrianglelefteq G \Rightarrow \exists \ \ B = AA^t > A$. Ind $|G:A|$: $A^{\alpha G} = A^{\alpha G}A^{\alpha t G} = A^{\alpha G}A^{t\alpha G} = (AA^t)^{\alpha G} = B^{\alpha G} = B^{G\alpha} = A^{G\alpha}$

7. $* \begin{cases} C_p^\alpha = 1 \Rightarrow P^\alpha = 1 \text{ für alle } |P| = p^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}} \\ C_p^\alpha = C_p \Rightarrow P^\alpha = P \end{cases}$ Bew mit $C_p \wr C_{p^{\alpha-1}}$

8. $C_p^\alpha = 1 \Rightarrow G^\alpha \leq G^p$. Bew mit $H = G \times P$, $P \cong G/G^p$.
$D = \operatorname{Diag} G \times P$ macht

$$\begin{aligned} H^\alpha &= (DP)^\alpha = D^\alpha \leq D \quad (7) \\ \text{Gegenstück: } 10 \rightarrow \quad &= (GP)^\alpha = G^\alpha \end{aligned}$$

z-Komp $D^\alpha = 1$, aber $\sim G^\alpha G^p/G^p$. NB: Es ist $D \lhd\lhd H$, da $H^p = G^p \leq H$

72/73

noch normal-distr. Funktoren

9. $C_p^\alpha = C_p$, A rein p-köpfig $\Rightarrow A^\alpha = A$. OBdA: A/A^p zykl.

I $\alpha \geq p$: $H := A \times P$, $P \cong A/A^p \in \mathfrak{G}_p$. Es ist $P^\alpha = P$ nach 7, also $H^\alpha = A^\alpha \times P$, $D = \operatorname{Diag}$, $D^p = H^p = A^p$, $H^\alpha = (AD)^\alpha = A^\alpha D^\alpha \Rightarrow H^\alpha/H^p \cong A^\alpha/A^p \bullet D^\alpha/A^p \cong \underbrace{A^\alpha/A^p \bullet A^\alpha/A^p}_{\text{abelsch}}$,
$\exp H^\alpha/H^p = \exp A^\alpha/A^p$; aber $H^\alpha/H^p \cong A^\alpha/A^p \times P$, also Exp $H^\alpha/H^p = \exp P$, $\exp A^\alpha/A^p = \exp A/A^p$, $A = A^\alpha$.

II α bel: $\beta := \alpha + p$ erfüllt I, also $A = A^\beta = A^\alpha A^p = A^\alpha$.

10. Satz $C_p^\alpha = C_p \Rightarrow$ Stets $A^\alpha A^p = A$ (dh A/A^α hat keinen p-Kopf).
Bew: $A = A^{\overline{p}}A^p$, dabei $\overline{p} = \{E \text{ einfach } \mid |E| \neq p\}$, $A^\alpha = A^{\overline{p}\alpha}A^{p\alpha} \underset{9}{=} A^{\overline{p}}A^{p\alpha}$, $A^\alpha A^p = A^{\overline{p}}A^p = A$.

11. Sei A rein p-köpfig. Dann $A^\alpha = A \Leftrightarrow C_p^\alpha = C_p$.
$\Leftarrow$ 9. Bew $\Rightarrow$: $P :\cong A/A^p$, $H := A \times P$. Ann $C^{p^\alpha} = 1$; $p^\alpha = 1$, $H^\alpha = A^\alpha \cdot 1 = A^\alpha = A$, also $H^\alpha = (AD)^\alpha = A^\alpha D^\alpha = AD$,
$A^\alpha = A$, $D \cong A$, also $D^\alpha = D$; $A = AD$, $D = 1$, $A = A^p$, $A = 1$ Wid.

73/74

$\lhd\lhd$

Kann man den "großen Durchschnitt" $A \cap B^A$ und das "kleine Erzeugnis" $A \cdot B_A$ durch symmetrische, noch feinere Bildung ersetzen (d.h. dass die alten sich durch die neuen ausdrücken lassen und die neuen nicht aus sn G hinausführen)?
Ist $(A \cap B)^A$ besser? Ist näher an $A \cap B$!
$(AB)_A$ 〃 〃 AB!

74/75

Fitting-Formationen

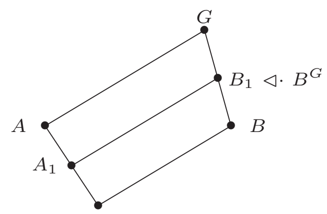
Dazu Hawkes MZ 117
„Fitt $\cdot F$“: $\mathfrak{F}$ sei eine Klasse mit: $N \lhd G \in \mathfrak{F} \Rightarrow N \in \mathfrak{F}$, $G/N \in \mathfrak{F}$,
$G = N_1 N_2$, $N_i \trianglelefteq G$, $N_i \in \mathfrak{F} \Rightarrow G \in \mathfrak{F}$,
$N_1 \cap N_2 = 1$, $G/N_i \in \mathfrak{F} \Rightarrow G \in \mathfrak{F}$.
Def:

$$G^{\mathfrak{F}} = G^\alpha := \bigcap_{\substack{N \trianglelefteq G \\ G/N \in \mathfrak{F}}} N$$

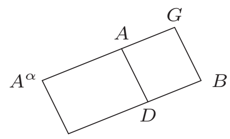
(1) α ist monoton und vertauschbarkeits-additiv:
$A, B \lhd\lhd G$ und $AB = BA \Rightarrow (AB)^\alpha = A^\alpha B^\alpha$.

Bew a) $A \lhd G \Rightarrow AG^\alpha / G^\alpha \in \mathfrak{F} \Rightarrow A / A \cap G^\alpha \in \mathfrak{F} \Rightarrow A^\alpha \leq A \cap G^\alpha \leq G^\alpha$.

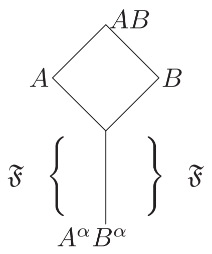
Bew b) [Genügt z.z.: $G^\alpha \leq \langle A^\alpha, B^\alpha \rangle$] Ind $|G|$, dann Ind $|G:A| + |G:B|$
Verweis: G, A, B min Gegenb. $\Rightarrow G = AB$
$A < G > B$, $B \lhd\cdot G$ sonst $B_1^\alpha = A_1^\alpha B^\alpha$, $(AB)^\alpha = (AB_1)^\alpha = A^\alpha B_1^\alpha = A_1^\alpha A_1^\alpha B^\alpha = A^\alpha B^\alpha$.



Ebenso $A \lhd\cdot G$; $A^\alpha \leq B$, sonst



$AB = A^\alpha B$, $(AB)^\alpha = A^{\alpha\alpha} B^\alpha \leq \langle A^\alpha, B^\alpha \rangle$.
Ebenso $B^\alpha \leq A$, daher $\langle A^\alpha, B^\alpha \rangle \leq D := A \cap B$
Es ist $A \trianglelefteq G$, also $A^\alpha \trianglelefteq G$; $B^\alpha \trianglelefteq G$, $A^\alpha B^\alpha \trianglelefteq G$.



$A/A^\alpha B^\alpha$ Faktgr von
A/A^α, also $\in \mathfrak{F}$,
also $AB \in \mathfrak{F}$,
$(AB)^\alpha \leq A^\alpha B^\alpha$ $\square$.
Frage: Umkehrung?

75/76

(2) $X, Y \lhd\lhd G \Rightarrow X_{\mathfrak{F}} \leq \mathcal{N}\langle Y^{\mathfrak{F}} \rangle$, denn das gilt allgemein für vert.add. Funktoren α

(3) Frage: Ist jeder Fitting-Formations-Funktor epimorphismentreu?

(4) Es gibt distributive Funktoren α, für welche $\{G \mid G^\alpha = 1\}$ eine Formation (z.B. $= \{1\}$) ist ohne dass α epim-treu ist.
Bsp: $G^\alpha := \bigcap \{M \mid M \lhd\cdot G,\ \text{Deckgr.} \cong \mathrm{SL}(2,5)\}$, hier $G := \mathrm{SL}(2,5)$, $\varphi : G \to \mathrm{PSL}(2,5)$, $G^{\alpha\varphi} = 1 \neq \mathrm{PSL}(2,5) = G^{\varphi\alpha}$.

(5) Schunck-Homomorphe, gesättigte:
Das sind einfach die Klassen $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F} =$ endl. Gr, für die gilt:

   (1) $H \in \mathfrak{H}$, $\varphi \in \mathrm{Hom} H \Rightarrow H^\varphi \in \mathfrak{H}$

   (2) Ist $F \in \mathfrak{F}$, $\varphi \in \mathrm{Hom} F$, so gilt $F^\varphi \in \mathfrak{H} \Leftrightarrow \exists A \leq F,\ A \in \mathfrak{H},\ A^\varphi = F^\varphi$.

   (Sept 73) Damit sollte der Aufbau der Theorie durchsichtiger werden.

76/77

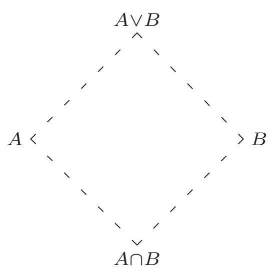
$\lhd\lhd$

(1) Nichtvertauschbarkeitsmaß

$$A, B \trianglelefteq\trianglelefteq\cdot\, G$$

$$\begin{aligned} \nu(A,B) &:= j(\langle A,B\rangle, A) - j(B, A\cap B) = \nu(B,A) \\ &= j(\langle A,B\rangle, B) - j(A, A\cap B) \end{aligned}$$

besser vielleicht $\overline{v}$ statt ν



(2) Kennzeichnung der Quasinormalität durch PermGr Eig.:
Q qn $G \Leftrightarrow$ Wirkt G auf Ω, so ist stets $\alpha^Q = \alpha^{QG_\alpha}$ $(\alpha \in \Omega)$

(3) Unter dem k-ten W-Sockel W_k hat jedes $A \lhd\lhd G$ höchstens den Defekt k. Frage: Was <u>nor</u>malisiert der W_k?

(4) $G = \langle A_1, \ldots, A_n \rangle$, $A_\nu \trianglelefteq\trianglelefteq G \Rightarrow \langle A_1^{g_1}, \ldots A_n^{g_n} \rangle = G$

Folge:

(5) 〃 〃 G tra $\Omega \Rightarrow$ für ein ν ist $\Omega_{A_\nu} = \emptyset$

77/78

(6) Sept 73: Ist A mit jeder Sylowgruppe vertauschbar, so ist A subnormal. (Für max nilp statt Sylow stimmts wohl nicht). Kegel!

78/79

Frage: Zusammenhang mit $\frac{N_1 N_2 N_3}{N_1 N_2 \cap N_2 N_3 \cap N_3 N_1}$?

24.6.73

Formel von Remak (J.f.r.u.a.M. <u>166</u>, 100):

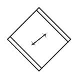
$N_1, N_2, N_3 \trianglelefteq G \Rightarrow \frac{N_1 \cap N_2 N_3}{(N_1 \cap N_2)(N_1 \cap N_3)} =: \frac{X}{Y}$ ist abelsch und inv. (bis auf $\cong$) unter S^3. Frage: Gilt die entspr Formel für <u>Ordnung</u> schon wenn $N_i \,\mathrm{v}\, N_k$?

a) Mod Nenner gilt $N_1 \,\mathrm{z}\, N_2$, $N_1 \,\mathrm{z}\, N_3$ (z := "zentralisiert"), also $N_1 \,\mathrm{z}\, N_2 N_3$, Zähler abelsch mod Nenner.

b) Mit $X := N_1 \cap N_2 N_3$, $Y = N_{12} N_{13}$, $N_{ik} := N_i \cap N_k$ gilt
$X \cap Y N_3 = (N_1 \cap N_2 N_3) \cap N_{12} N_{13} \cdot N_3 = N_1 \cap N_{12} N_3 = Y$,

$$\text{also } \frac{X}{Y} = \frac{X}{X \cap Y N_3} \cong \frac{X Y N_3^*}{Y N_3} = \frac{X N_3}{Y N_3} = \frac{N_1 N_3 \cap N_2 N_3}{N_{12} N_3}.$$

$^* XYN_3 = XN_{12}N_3 : XN_{12} = X$.
Dies ist inv. bei (12), die ursprüngliche Darstellg b. (23) also ist $\frac{X}{Y}$ bis auf $\cong$ inv. gegen $\langle (12), (23) \rangle = \mathrm{Sym}\, 3$.

<u>Historisches:</u> Isomorphiesatz $\frac{AN}{N} \cong A/A \cap N$ sowie  "Einschließung" von Faktorgruppen wohl erstmals bei Remak Crelle <u>166</u>, 65-67. Früher vielleicht bei Klein-Fricke, Vorles. über d. Th. elliptischen Modulfunktionen Bd I S. 402-406 (Fußnote 3 bei Remak, Crelle <u>163</u>, 2). $\pitchfork$ in <u>163</u>, 8
"Hyperzentrum" Remak Crelle 163, 34 R hat $< i$ für $\lhd$, $\widetilde{\wedge}$ für $\cong$
Frage: Erweiterung auf $N_1, \ldots, N_k$, $k > 3$.

79/80

[gesamte Seite 80 leer]

80/81

$\underline{X \to X_A}$

1. Dieser Prozeß, bei festem A auf alle $X \leq G$ angewandt, erhält nicht nur $\leq$, sondern auch Normalisierung; daher auch $\trianglelefteq$. (Sept 73)
2. $X_{AB} \cap X_{BA} = X_{(A\cup B)^2}$, $X_{ABA} \cap X_{BAB} = X_{(A\cup B)^3}$ usw. wenn $1 \in A \cap B$, $A, B \subseteq G$.

81/82

[gesamte Seite 82 leer]

82/83

Abschwächungen der Vertauschbarkeit

In der Theorie der unendlichen Gruppen heiße ein Erzeugendensystem E von G endlich erzeugend, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $G = E^n$. Bei festem n und $E = A \cup B$; $A, B \leq G$ ist das eine Abschwächung der Vertauschbarkeit $AB = BA$, diese entsteht für $n = 2$.
Zu untersuchen: Verallgemeinerung auf mehr als 2 Gruppen: $A_1, A_2, \ldots, A_k$ heißen n-vertauschbar, wenn $\langle A_1, \ldots, A_k\rangle = (A_1 \cup \cdots \cup A_k)^n$.

83/84

gesamte Seite 84 leer

84/85

$\underline{\text{Uni-Primitive Gruppen vom Grad } 2p}$

2.12.73 I. Neuer Beweis für Rang $G = 3$ (Bez. wie FPG). $\mathfrak{G} = \{G\text{-Moduln in } F := \{f : \Omega \to K\}\}$, char $K = p$, $Gr = Gr_P$, $P \in p\text{-Syl } G$, $P = \langle (12\ldots p)(p+1\ldots 2p)\rangle$.

Sei $L \in \mathfrak{G}$, $L \not\leq C$, $\mathrm{Gr}\, L < p-1$. Dann

(1) $(f_1, f_2) \in L \Rightarrow \int f_i = 0$

(2) $L \leq C^L$

(3) $e := (-\mathbb{1}, \mathbb{1}) \notin L$ wegen Primitivität

(4) L einreihiger P-Modul, Fuß $(\mathbb{1}, \mathbb{1})$; $C \leq L$

(5) $l := \mathrm{Gr}\, L > 2$, sonst G linear, p-abgeschlossem

(6) $l > \frac{p}{2}$. Bew: f^2

(7) $\mathfrak{G} \ni M \leq L$, $O < \mathrm{Gr}\, M \Rightarrow M = L$, dh- L/C irred.

Bew 6: Sonst $L_{\min} > C$, einreihig $\to \mathrm{Gr}\, L^2 \leq p-3$, $L_2^2 \leq L^2$, $L_2^2 \leq L$

85/86

Bew (7): Absteigende P-Zentralreihe von $M^\perp$ betrachten wenn $\dim M = p-d$, so $1 \leq d < \frac{p}{2}$, $\operatorname{Gr} M^\perp \cap L = 0^*$. $2p-1 = \dim C^\perp \geq \dim(M^\perp + L) = p+d+l-1$, $p-d = l$.
Mit x Zweierschritten, y Einerschritten annulliert $(t-1)M^\perp$;
daher $\operatorname{Gr} M^\perp = p-l$, $(2x+y = p+d, x+y = p-1, x = d+1, y \leq p-d-2)$.
Da $e \in M^\perp$ und $\langle e \rangle_G \cdot (t-1)^{p-2} = e$, $L(t-1)^{x+y-1}$.

[Randnotitz: ?]

(8) Es gibt höchstens ein $L \in \mathfrak{G}$ mit $1 < \dim L < p-1$. Ann $M \neq N$, sonst etwa $\dim M \leq \dim N$, $L := M + N$ widerspricht (7).

(9) $\exists \varphi \in \operatorname{Hom}_G(F,F)$: $C^\varphi = 0$, $F^\varphi \not\leq C$.

(10) $\exists \varphi \in \operatorname{Hom}_G(F,F)$: $C^\varphi = 0$, $(f_\alpha - f_\beta)^\varphi \neq 0 \;\; \forall \alpha \neq \beta$, dann $(f_\alpha - f_\beta)KG = C^\perp$.

(11) $\exists M \in \mathfrak{G}$: $\dim M = p$

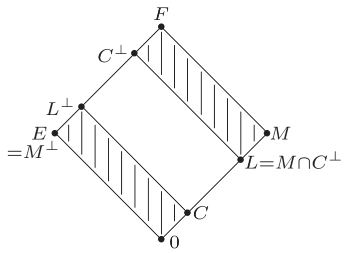
(12) $M \in \mathfrak{G}$, $\dim M = p \Rightarrow M$ einreihig, sonst $(-\mathbb{1}, \mathbb{1}) = e \in M$.

(13) Wenn $E \in \mathfrak{G}$, $C \not\leq E$, so $\dim E = p$, E einreihig, Fuß $(-\mathbb{1}, \mathbb{1})$ & E irreduz.
86/87

(14) $\exists E \in \mathfrak{G}$, $\dim E = p$, $C \not\leq E$, Fuß$E = e$. Sonst $\exists$ $\dim M = p$, $C \leq M$, $E := M^\perp$

(15) Der Verband der $\mathfrak{G}$-Moduln sieht so aus

dim $= p$



(16) Wegen Isomorphiesatz kommen als $\operatorname{Ker} \varphi$, $\varphi \in \operatorname{Hom}_G(F,F) =: \mathcal{H}$ nur in Betracht.

(17) $\psi \in \mathcal{H} \Rightarrow \psi = (\text{const auf } E) = c \cdot \mathrm{id}_E$, da $\psi(e) = c \cdot e$ ($\psi \in \operatorname{Hom}_p$!) und $E = eKG$

(18) $\dim \mathcal{H} \leq 3$, sonst $\exists \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}$, $\operatorname{Ker} \varphi_i \geq (\mathbb{1}, \mathbb{1}), e, E, C, L^\perp$, also $\operatorname{Ker} \varphi_i \geq C^\perp$, aber dann $\varphi_i(F) = C$, φ_i lin abh.

87/88

$$G \text{ pri}, n = \begin{cases} p+p^2 \\ p+p^\alpha \end{cases} \quad \cdots \Rightarrow G \text{ 2-tra}$$

Forts.: Verallg auf pri Gruppen mit einem Element der Ord $p^\alpha > p$, das nur einen Zyklus t^Δ des Grades p^α und einen t^Γ der Länge p besitzt: $n = p^\alpha + p$. Wähle $K \in \mathfrak{K}_p$.

(1) Sei $e = 0$ auf Γ, $= 1$ auf Δ. Dann $E := eKG$ mindestens Grad $p^\alpha - 1$, $\dim p^\alpha$.

(2) Dim $M < p^\alpha \Rightarrow e \notin M$ $(M \leq KGF)$

(3) Dim $M > p \Rightarrow E \leq M$, $\dim M \geq p^\alpha$. Bew: $eG\ KG(t-1)^{\frac{1}{p-1}} \leq M$

(4) Dim $\begin{cases} E/E \cap M \\ (E+M)/M < p^\alpha \end{cases} \quad \Rightarrow E \leq M$

(5) Wähle $\underline{M := \sum N, E \not\leq N}$. Dann $\dim M \leq p$ (3), $C \leq M$, Dim $M^2 < p^2$, $e \notin M^2$, $M^2 \subseteq M$, $\underline{M = C}$. Daher:

(6) $E^\perp = C$, $E = C^\perp$.

(7) Die einzigen G-Mod sind $0, C, C^\perp, F$; also

(8) G 2-tra

Das gleiche Ergebnis dürfte durch Zerschneidung folgen, wenn die p-Sylowgr einen Konst d. Grades p und einen vom Grad p^2 hat <u>und nicht abelsch</u> ist. Also:

<u>Satz:</u> $n = p + p^2$;
<u>G enthalte eine nichtabelsche p-Gruppe oder ein Elt der Ord p^2</u>; G pri $\Rightarrow G$ 2-tra [d.h. p-Sylowgruppe von G nicht elem. abelsch]. Also wohl: G uni pri, $n \leqq p + p^2 \Rightarrow p^2 \nmid G$

88/89

Uniprim. Gruppen vom Grad $2p$
II: Fortführung der Theorie vom FPG (char = 0):

(1) $D := W - V$ hat EWe $u = 2s + 1$ p-mal, $-u$ p-mal und ist hermitesch

(2) $D^2 = u^2 I$. Mit $D = \begin{pmatrix} A & B \\ B' & C \end{pmatrix}$ wird $\begin{cases} A^2 + BB' = n^2 I \\ AB + BC = 0 \end{cases}$

(2′) $u^2 = 2p - 1$ (Zeilensumme). $D = D'$, $A = A'$, $C = C'$. Wegen A, B, C zentralisiert von P sind A, B, C vertauschbar. $B(A+C) = 0$. Wäre $\det B = 0$, so wegen $B = \sum_{t \in P} \pm t$ sogar $B = \pm J$, $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_p$

$\mathfrak{W} \ni D - J_{2p} = \begin{pmatrix} A-J & 0 \\ 0 & C-J \end{pmatrix}$, G impr. Wid. Also $C = -A$, <u>daher</u> $\det B = 0$

<u>anders:</u> $\begin{pmatrix} u+A & B \\ B' & u+C \end{pmatrix}$ ist die Proj. Matrix auf M, also $Bx \equiv 0 \Rightarrow (u+C)x \equiv 0$, ebenso $(-u+C)x = 0 \Rightarrow x = 0$; $\det B \not\equiv 0$

(3) $D = W - V = \begin{pmatrix} A & B \\ B' & -A \end{pmatrix}$

(4) Mit $T \in \operatorname{Sym} p$, $T^{-1}\cancel{X}\,T = X = X'$ ($\cancel{X} \in P$) wird
$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -T \\ T & 0 \end{pmatrix}}_{S^-} \begin{pmatrix} A & B \\ B' & -A \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & T \\ -T & S \end{pmatrix}}_{S} = -\begin{pmatrix} A & B \\ B' & -A \end{pmatrix}$; $s^2 = -I_{2p}$

Randbemerkungen: etwa $T = \begin{pmatrix} 1 & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ & & & 1 & \\ & & 1 & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix}$

(5) $G^* := \langle G, S^-GS \rangle \underset{1,2}{\lhd} \langle G, S \rangle =: \widehat{G}$ monomial, G^* zentralisiert $W - V$.

89/90

(6) $\widehat{G}$ ist zweifach transitive monomiale Gr., nach Diedersatz

(7) G^* 〃 2-tra monomiale Gr, da $\lhd G^*$ und $2 \nmid 2p - 1$.

(8) G^* ist nicht eine altern. mon. Gr, sonst wähle $0\ \alpha\ \beta$ verschieden, $\alpha, \beta \in$ Bahn zu V,

$$W - V = \begin{array}{c} 0\alpha\beta \\ \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{matrix} & Y \\ \hline & \end{array}\right) \end{array}$$

$\exists g^* \in G^*$, Ord $g^* = 3$, $g^* = \left.\begin{pmatrix} & \cdot & \\ & & \cdot \\ \cdot & & \end{pmatrix}\right\}$ Z auf $(0\ \alpha\ \beta)$. $\operatorname{Diag} g^* = 1$ wegen Ord $g^* = 3$, also $ZY = Y$, je zwei Zeilen von Y untersch sich höchstens um Vorzeichen, also da mehr $+1$ als -1 auftritt, sind alle Zeichen gleich. Daher hat g^* nur Faktoren $+1$ auch links oben, $g^* \in \operatorname{Sym} 2p$. $\langle G, g^* \rangle$ zentralisiert V, enth 3-Zyklus, ist $\supseteq \operatorname{Alt}\Omega$, 2-tra, $W - V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \ddots & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Wid.

(9) $G^*_+ :=$ von G^* induzierte Permutationsgruppe

$\Rightarrow G < G_+^* \underset{1,2}{\lhd} \widehat{G}_+ \neq \operatorname{Sym}\Omega$, $G_+^* = \langle G, G^R\rangle$, $R := \begin{pmatrix} 0 & T \\ T & 0 \end{pmatrix}$, $\widehat{G}_+ = \langle G, R\rangle$
"+" heißt -1 durch $+1$ ersetzen in den monomialen Matrizen.

90/91

(10) Δ_2 und Δ_3 (die zu V bzw W gehörigen Bahnen von G_1) enthalten gleich viele Punkte aus $\{1, 2, \ldots, p\}$. Von $\{p+1, \ldots, 2p\}$ enthält Δ_3 u Punkte mehr als Δ_2.
Bew: Auf $\{1 \ldots p\}$ ist $\mathrm{Anz}_{\Delta_3} - \mathrm{Anz}_{\Delta_2}$ = Zeilensumme von A, wo $D = \begin{pmatrix} A & B \\ B' & -A \end{pmatrix}$; also = Spaltensumme von $-A$, also auch = Zeilensumme $-A$. Auf Ω ist $|\Delta_3| - |\Delta_2| = w - v = 2s + 1 = u$.

(11) Ist $|\overbrace{\mathcal{N}_G(P)}^{N} : P| = n$, so $P \equiv 1$ (n) und $u \equiv \pm 1$ (n), daher $n \mid 2s$ oder $n \mid 2(s+1)$. Denn N_1 hat auf $\Delta_2 \cup \Delta_3$ genau einen Fixpunkt, daher $v \equiv 0$, $w \equiv 1 \pmod n$ oder $v \equiv 1$, $w \equiv 0 \pmod n$, $u = w - v \equiv \pm 1$.

(12) Die $\substack{\text{ersten} \\ \text{letzten}}$ p Zeilen von $uI + D = \begin{pmatrix} uI + A & B \\ B' & uI - A \end{pmatrix}$ bilden eine Basis des G-Moduls M von S.87; Desgl. …von $-uI + D = \begin{pmatrix} -uI + A & B \\ B' & -uI - A \end{pmatrix}$ …von E, S.87.
Für $X := \begin{pmatrix} uI + A & B \\ B' & -(uI + A) \end{pmatrix}$ ist $X^- G X = \begin{pmatrix} \square & 0 \\ 0 & \square \end{pmatrix}$,
$X^2 = 2u \begin{pmatrix} uI + A & 0 \\ 0 & uI + A \end{pmatrix}$

(13) (a) $(A + iB)(A + iB)^* = A^2 + BB' + iA(B - B') = u^2 I + iA(B - B')$
(b) $A + iB$ unitär $\Leftrightarrow B = B'$ bis auf Skalarfaktor

91/92

(14) Ist in $2p = u^2 + 1$ das <u>u eine Primzahlpotenz</u>, so enthält die scharf 3-tra p-Gruppe $\mathrm{PSL}_2(u^2)$ eine reguläre Diedergruppe der Ordnung $2p$, über $\mathrm{GF}(u^4)$ hat sie die Normalform $\left\{ \begin{pmatrix} a & \\ & a^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, wobei $a^{u^2+1} = 1$, also a eine primitive $(u^2 + u)$-te EW.
Frage: Kann man zeigen, dass ___ immer gelten muß? Gibt es dann ein invariantes "Doppelverhältnis" für G?

(15) Welche Determinante S haben die p Zeilen von $(uI + A, B)$ bei der Darstellung durch eine $\mathbb{Z}$-Basis der ganzzahligen Funktionen in M, usw.? Es ist $s \big| |uI + A|$, $s \big| |B|$; $s^2 \big| (2u)^p \cdot |uI + A|$ wegen $(uI + A)^2 + BB' = 2u(uI + A)$.

(16) Idee: Mod q rechnen, wo $\mathbb{P} \ni q \mid u$.

(17) Kombinatorischer Abschluß funktioniert für monomiale Gruppen (wobei Übereinstimmung von s an α, β mit passendem g auch bezüglich der Faktoren zu fordern ist)

92/93

(18) Der 2-Abschluß einer 2-tra monomialen Gruppe mit Faktoren ± 1 ist genau dann $2^n \operatorname{Sym} S_n$, wenn G_{01} alle 4 Vorzeichenkomb.

$\begin{pmatrix} + & & \\ & + & \\ & & \begin{array}{|cc} \cdot & \\ & \cdot \end{array} \end{pmatrix} + - \quad - + \quad - -$ enthält (natürlich genügen 3 davon).

G^* zentralisiert $W - V$. Daher:

(19) (Da die zu G^* gehörige Perm-Gr. $P^* \neq \operatorname{Sym} n$ ist, ist der 2-Abschluß von $G \neq 2^n \operatorname{Sym} n$, also) enthält G^* nur 1 oder 2 Komb. $++$, $--$.

(20) Der aus $W - V$ durch Streichen der ersten Zeile entstehende Abschnitt hat die rationalen Wurzeln $0, \pm u$ ($p - 1$ mal); daher ist er "rational" im Sinn von Schur z.B. im Fall $n = 26$, $u = 5$. (Außerdem hat er Wurzeln hoher Vielfachheit, also werden auch seine Abschnitte ziemlich rational sein). Bei $n = 26$ enthält daher wohl P^* ein Produkt von 6 Viererzyklen, also 2 Fixpunkten, das auf einer <u>el. abelschen</u> Gruppe der Ord 25 alle Potenzautom. induziert, wenn $\downarrow$ vorhanden.

93/94

[gesamte Seite 94 leer]

94/95

<u>Subnormalteiler von P-Gr.</u>

(Passman, "Preprint Subnormality in loc. fin. gps", submitted to Proc LMS Jan 74)

1. Eine endl. p-Gruppe P wirke transitiv auf Ω, $P = \langle P_1, \dots, P_k \rangle$. Dann $\exists i \exists x \in P_i : \Omega_{\langle x \rangle} = \emptyset$. *Randbemerkung:* "Lemma 2.5"
2. Lemma 2.6: $G = \langle A_1, \dots, A_k \rangle$, $A_i \lhd\lhd G$. Wenn jedes A_i höchstens n Punkte bewegt, ist jedes $|\alpha^G| \leq n^n$; und wenn G p-Gruppe, so $|\alpha^G| \leq n$. Ähnliches für lineare Darstellungen.

$\lhd\lhd$ Frage:

Folgt aus $A \mathrm{v} B^g \; \forall g \in G$ und $A \lhd\lhd AB$ schon $A \lhd\lhd G$?

95/96

Verm: Wenn es in einer abelschen Torsionsgruppe überhaupt eine zyklische Ugr maximaler Ordnung gibt, so kann diese direkt abgespalten werden.

Ein Konvergenzbegriff für Untergruppen: $A_i, A \leq G$. Dann $A_i \to A :\Leftrightarrow A_i \cap A \uparrow A$, $\langle A_i, A \rangle \downarrow A$.

96/97

Vertauschungmatrizen von PGr

Wenn man eine ganzzahlige Vertauschungsmatrix durch eine unimodular äquivalente ersetzt, so ergibt sich eine Reduktion von G modulo den Elementarteilern
97/98

[gesamte Seite 98 leer]
98/99

Schwach abgeschl. U'Gruppen

19.2.74

(1) Def: A schw. abg. in G

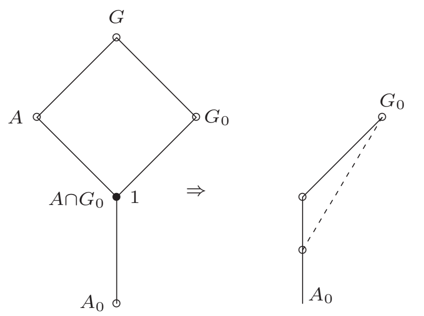
  (a) $:\Leftrightarrow A \leq G$, und $A^g \leq \mathcal{N}(A) \Rightarrow A^g = A$
  oder? A^g ksn $A \Rightarrow A^g = A$, dazu ansehen Gorenstein S. 255ff.

(2) Versuchsweise: A stark abg. in $G :\Leftrightarrow A \leq G$ und aus $a^g \in \mathcal{N}(A)$ folgt $a^g \in A$.

(1′) Wohl äqu.:

  (b) $A, A^g \trianglelefteq\trianglelefteq \langle A, A^g \rangle \Rightarrow A = A^g$
  (c) $A, A^g \trianglelefteq \langle \quad \rangle \Rightarrow \quad \ldots$

99/100



100/101

<u>locally and weakly subnormal subgroups</u>

(vgl. Skizze auf S. 100): 11.6.74

Def.: A ℓsn $G :\Leftrightarrow$ Ist A_0 endlich erzeugte Ugr. von A, G_0 endl. erz. Ugr. von G, $A_0 \leq G_0$, So existiert $S \leq A$ mit $A_0 \leq S$ sn G_0.
[Ursprüngliche Bezeichnung: wsn oder (kurz) w statt ℓsn]

(1) A ℓsn G; $\varphi \in \operatorname{Hom} G \Rightarrow A^\varphi$ ℓsn G^φ

(2) A_i ℓsn $G \Rightarrow \langle A_i \rangle$ ℓsn G. Bew. $|I| < \infty$ mit Rosebl.-Stonehewer J. Alg. 8

(3) A_1, A_2 ℓsn $G \Rightarrow A_1 \cap A_2$ ℓsn G.

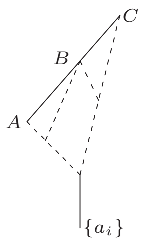
(4) $G = \bigcup G_i$, G_i Turm, $A \cap G_i$ ℓsn $G_i \Rightarrow A$ ℓsn G.

(4*) (A_i, G_i) Turm; A_i, $G_i \leq G$, A_i ℓsn $G_i \Rightarrow \bigcup A_i$ ℓsn $\bigcup G_i$

(5) Gibt es eine Topologie auf G, für welche die ℓsn -Ugr. genau die offenen Ugr sind? Kaum

Achtung: Fraglich ist, ob A ℓsn A ℓsn $C \Rightarrow A$ ℓsn C!
Erfüllt ist das aber für wsn [mit] A wsn $G :\Leftrightarrow A = \bigcup\limits_{\substack{S \text{ sn } G \\ S \leq A}} S$

Bew:



101/102

$A_{..G}$, wsn

(1) Satz: $A \leqq G$ bel. Gruppen. $A_{..G} := \bigcup_{\substack{S \leqq A \\ S \text{ sn } G}} S$. Dann ist $A_{..G} \leqq G$, $A_{..G}$ wsn G.
Bew: Rosenblade-Stonehewer $\mathfrak{G}$ locally coalescent

(2) $A, B \overset{\text{oder } \ell}{\text{wsn}} G$, A π-Gruppe, B π'-Gruppe $\Rightarrow [A, B] = 1$.
Ansatz: A maximal mit $A \lhd^d G$, B wsn G, $\langle A, B \rangle \neg$wsn G

Fall I: $A \leq \mathcal{N} B$

〃 allg.

102/103

Charaktere

Sei χ ein Charakter von G, $\alpha \in \operatorname{End} G$, $k \in \mathbb{N}$, $\psi(g) := \chi(g^{\alpha + k})$. Ist dann χ ein verallg. Charakter? (14.9.74)
103/104

Zur axiomat. Def. des Subnormalisators $\mathcal{S}_G A$.

Sei $(G, A, N, S_1, \ldots, S_r)$ unter der Bedingung G endl. Gr., $A \leq G$, $A \trianglelefteq N$, $S_\rho \operatorname{sn} G$, $G = \langle N, S_1 - S_r \rangle$, $S_\rho \subseteq \mathcal{S}_G(A)$, $A \notin$ sn G minimal im Sinne

(α) G min

(β) A min

(γ) N min

(δ) $\sum(|S_\rho| - 1)$ min

Dabei sei $\mathcal{S}_Y X$ für die Ausschnitte Y von G definiert so daß
Anmerkung: [Vielleicht hilft die Eigenschaft $\mathcal{S}(A) \cap \mathcal{S}(B) \leq \mathcal{S}(A \cap B)$ *]*

(I) $X \leq Y = \mathcal{S}_Y(X) \Leftrightarrow X \operatorname{sn} Y$

(II) $Z \leq Y \Rightarrow \mathcal{S}_Y(X) \leq \mathcal{S}_Z(X \cap Z)$

(III) $\varphi \in \operatorname{Hom} Y \Rightarrow (\mathcal{S}_X Y)\varphi \leq \mathcal{S}_{X^\varphi}(Y^\varphi)$

(IV) $X_0 \trianglelefteq X \leq Y \Rightarrow \mathcal{S}_Y(X) \leq \mathcal{S}_Y(X_0)$

(V) Ist A extremal mit einfachem normalen Komplement, d.h. $u = |A| = p'$. so ist dieses $\cap \mathcal{S}_G(A) = 1$

(VI) : X wieland[t]sch in $Y \Rightarrow \mathcal{S}_Y(X) = X$.

Dann gilt mit $S := \langle S_1, \ldots, S_r \rangle^N$:

(a) $\underline{G = AS,\ N = A,\ S \trianglelefteq G}$
Bew: Klar ist $G = SN$, $N \trianglelefteq G$. Wäre $AS = G^* < G$, so $A \operatorname{sn} G^* \triangleleft G$ Wid; also $AS = G$. Wäre $A < N$, so $(G, A, A, S_1, \ldots, S_r)$ betrachten $\Rightarrow A \operatorname{sn} G$, Wid.

(b) $1 \neq M \trianglelefteq G \Rightarrow AM \operatorname{sn} G$
Bew: $\varphi : G \to G/M$, $(\varphi(G)\varphi(A)\varphi(S_\rho)$ $|\varphi(G)| < G \Rightarrow \varphi(A) \operatorname{sn} \varphi(G)$, $AM \operatorname{sn} G$.

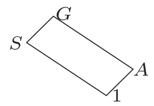
104/105

(c) Alle Kompositionsfaktoren von S sind isomorph.
Bew: $S_1 \neq 1$, da $\sum |S_\rho| = \min$. Wähle $S_1^{\cdot} \triangleleft\cdot\, S_1$, $G^{\cdot} := \langle A, S_1^{\cdot}, S_2, \ldots, S_r \rangle$, $G^{\cdot} < G$, $S^{\cdot} := \langle S_1^{\cdot}, S_2, \ldots, S_r \rangle^A < S$; $A \operatorname{sn} G^{\cdot} = S^{\cdot} A$. $\mathrm{KF}(S, S^{\cdot}) = \{S_1/S_1^{\cdot}\} =: E$, $M := S^E$. Wäre $M > 1$, so $MA \operatorname{sn} G$, $S^{\cdot} \geq M$, $G^{\cdot} = S^{\cdot} A \geq MA$, $A \operatorname{sn} MA \operatorname{sn} G$ Wid.

(d) $B \triangleleft A \Rightarrow B \operatorname{sn} G$. Bew IV $\mathcal{S}_\rho \leq B$ $(GBAS_1 \ldots)$ betr.

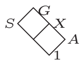
(e) A einköpfig, $C \triangleleft\triangleleft A \Rightarrow C \operatorname{sn} G$, denn $C \operatorname{sn} B \triangleleft\cdot\, A$.

(f) S ist eine q-Gruppe, $q \in \mathbb{P}$.
Sonst ist jeder einköpfige Subnormalteiler von S perfekt und daher in einem S_ρ, also in $\mathcal{S}_G(A)$ enthalten, daher folgt aus $1 \neq M \triangleleft G$, $M < S$ stets $A \operatorname{sn} MA \operatorname{sn} G$. Daher ist S ein <u>minimaler</u> Normalteiler von G. Jedes S_ρ ist einfach, sonst wäre $S_\rho = |S^1 \times S^2 \times \cdots \times S^k|$, $k > 1$, dann $\sum(|S^\kappa| - 1) < |S_\rho| - 1$. Es ist $A \not\leq S$, sonst wäre $G = S$, also $S \cdot\!\triangleleft\, S$, S einfach, $A \leq S = S_1 \leq \mathcal{S}_G(A)$, $A \operatorname{sn} G$, Wid. $B := A \cap S \Rightarrow B = 1$, sonst $B \operatorname{sn} S$, $B \trianglelefteq S$, $B \trianglelefteq G$, $A = AB \operatorname{sn} G$, Wid. Also:



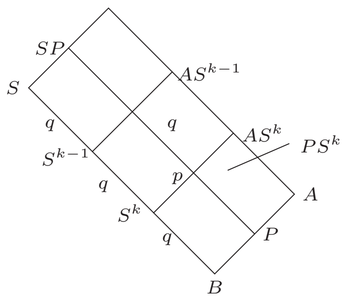
, A einfach **???**

105/106

Hieraus folgt $|A| = p$ (sonst gilt für jede Sylowgr P von A: $P \operatorname{sn} SP$ (betr. $(SP, P, P, S, \dots)$). Da S kein KompInd p hat, folgt $[S, P] = 1 \forall P$, $[S, A] = 1$, Wid.). Wenn A eins der S_ρ normalisiert, ist dieses $\lhd G$, also $= S$, S einfach. 

Aus $A \le X \le G$ folgt $A \operatorname{sn} X[(X, A, A, S \cap X)]$, also ist A von Primzahlord, extrem in G, und hat normales einfaches Komplement. Das widerspricht V. Also $|E| = q$, $|S| = q^{\cdot\cdot}$.

(g) [Für $B := S \cap A$ ist] $|A : B| = p \in \mathbb{P}$, $p \neq q$.
Wäre $|A : B|$ zusammengesetzt. Wegen $|S| = q^{\cdot\cdot}$ ist $A \not\le S$. Sonst sei $S = S \lhd S^1 \lhd \cdots \lhd S^m = B$ eine A-Komp-Reihe von S bis $B := S \cap A$ $(\lhd\cdot\ A)$. $\exists k \in \{1, \dots, m\}$: $AS^k \ntrianglelefteq AS^{k-1}$. Wähle $k : AS^k \notin \operatorname{sn} AS^{k-1}$.



Es gibt $p \neq q$ eine p-Sylowgruppe von AS^k/S^k, die nicht von S^{k-1} normalisiert wied. Sonst $O^q(AS^k) \lhd AS^{k-1}$, Wid. Sie hat die Gestalt PS_k mit $B < P < A$. Betrachte $(SP, P, P, S_1 \dots)$, gibt $P \operatorname{sn} SP$, $PS^k \operatorname{sn} SP$, $PS^k/S^k \operatorname{sn} PS^{k-1}/S^k$, aber PS^k/S^{k-1} ist Sylowgr von PS^{k-1}/S^k, also $PS^k \lhd PS^k$, Wid.

106/107

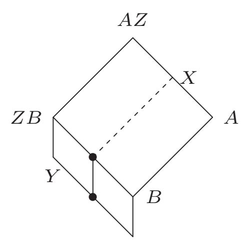
(h) $\operatorname{Ztr} S \cap A = 1$, denn $\leqq A\&\ \lhd G$; (e)

(i) S enthält nur einen minimalen G-Normalteiler Z. Es ist $Z \le \operatorname{Ztr} S$. Bew: Klar ist $[S, Z] = 1$. Wäre auch $Z^* \lhd_G S$, so $D = ZA \cap Z^*A \operatorname{sn} G$ (b); $D = YA$, $1 \le Y = Z \cap D$, $Y = Y^A$. $Y \lhd G$, wäre $Y < Z$, so $Y = 1$, $D = A \operatorname{sn} G$, Wid. Also $Y = Z$, ebenso $Y^* = 1$, $\underline{ZA = Z^*A}$. $\cap S$: $ZB = Z^*B$ Ord $= |Z||B|$, aber $(Z \times Z^*) \cap B = 1$, also Ord $= |Z||Z^*||B|$, Wid.

(j) $A = O^qA$. Bew: Sonst (e) $O^qA \operatorname{sn} G$, $O^qA \underbrace{\le A \le}_{q} G$, $A \operatorname{sn} G$.

(k)
$A \lessdot AZ = A^{\cdot\cdot G} = O^qG$.
Bew: (b): $AZ \operatorname{sn} G$, $A \le X \le AZ$.
$Y := Z \cap X \trianglelefteq G \Rightarrow$

$$Y = \begin{cases} 1 \Rightarrow A^{\cdot\cdot G} = A, \\ Z \Rightarrow AZ = A^{\cdot\cdot G} \end{cases}$$



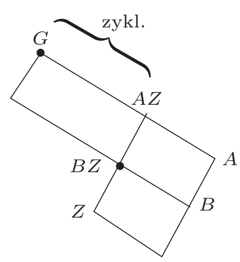
$\mathrm{KF}(G, A^{\cdot\cdot G}) = \{C_q\}$, $O^q G \le AZ$, $O^q G = O^q(AZ)$, nach (j) ist $O^q A = A$, $O^q(AZ)$ wird von den p-El'ten von A erzeugt, also $O^q(AZ) \ge A, = AZ$ (wie vorher $A^{\cdot\cdot G} = AZ$).

Achtung: A-isomorphe irred. Moduln sind nicht notwendig isomorph, aber in diesem Fall ja wegen Zentralreihe S einreihig.

107/108

(l) Sei $s \in S$, $\langle A, s\rangle < G$. Dann $s \in S_G \Leftrightarrow s \in \mathcal{N}_G A$.
"$\Leftarrow$" (I). "$\Rightarrow$" $A\,\mathrm{sn}\langle As\rangle =: H$, $A = O^p H \lhd H$.

(m) $r = 1$, d.h $G = \langle A, S_1\rangle$ und S_1 zyklisch; $G = S_1 \cdot AZ$. Denn $r > 1 \Rightarrow \langle A, S_\rho\rangle < G$, $S_\rho \le \mathcal{N}(A)$; $A \lhd G$, Wid.
$S_1 = T_1 T_2$, T_1, $T_2 \lhd\cdot\, S_1 \Rightarrow \langle A, T_i\rangle < G$, $T_i \le \mathcal{N}(A)$, $A \lhd G$, Wid.



(n) BZ ist elem. abelsch, sonst $1 \ne (BZ)'$ od $(BZ)^p \lhd G$
$\le B$

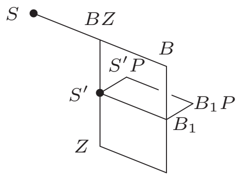
(o) $P \in p$-Syl A wirkt fixpunktfrei auf BZ; daher ist jede Gruppe U mit $P \le U \le AZ$ einköpfig und $= O^p U$.
Denn $\mathrm{Fix}_{BZ}\ A \cap Z = 1$ und $\lhd G$, da $= \mathrm{Ztr}\, AZ$ & $AZ \trianglelefteq G$.

Sei $P \in p$-Syl A ($= p$-Syl G) und $S_1 = \langle s\rangle$

(p) Wenn $\langle s, P\rangle < G$, so $[s, P] = 1$.
Bew: $A^* := \langle s, P\rangle \cap A \Rightarrow \langle s, A^*\rangle \rhd\rhd A^* \Rightarrow O^p\langle A^*\rangle \trianglelefteq \langle sA^*\rangle \Rightarrow s \in \mathcal{N}(O^p A^*) \Rightarrow s \in \mathcal{N} O^p(A^* \cap B) \Rightarrow A^* \cap B \lhd G \Rightarrow A^* \cap B = 1 \Rightarrow O^p A^* = 1 \Rightarrow O^p A^* = P$, $[s, P] \subseteq S \cap P = 1$.

108/109

(q) Wenn es $P \in p$-Syl G derart gibt, dass $[S_1, P] = 1$, so ist $B \underset{P}{\cong} Z$. Denn BZ ist als S-Modul einreihig; $B \cap PS < G$, $S' \underset{S}{\lhd\cdot} BZ$; $B_1 = S' \cap B$.
$A \cap \downarrow = B \cap P$.



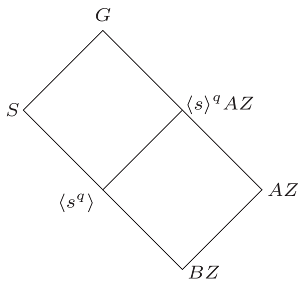
$s \in \mathcal{N}(B_1P)$, $s \in \mathcal{N}(B_1)$, $B_1 \lhd G$, $B_1 = 1$. Sowohl Z wie B/B_1 sind irred. P-Moduln, also isomorph.

noch $\langle s \rangle = S_1$. Dann

(r) $\langle s^q \rangle BZ$ abelsch, $\underset{q}{\lhd} S$, $\lhd$ G.

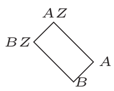
Bew: $A \operatorname{sn} \langle S^q, A \rangle$, $A \lhd \langle S^q, A \rangle$, $s^q \in \mathcal{N}(B)$, $B \lhd \langle s^q, C \rangle$, $C := BZ$, $BZ/B \in \operatorname{Ztr} \langle s^q, C \rangle / B$, $\langle s^q, C \rangle / B$ abelsch, $\langle\ \rangle' \leq B \lhd G = 1$

(s) $s^q \in B$, $|G : AZ| = q$.
Bew: $S^q \notin BZ \Rightarrow [S^q BZ/BZ, AZ] \leq BZ$.



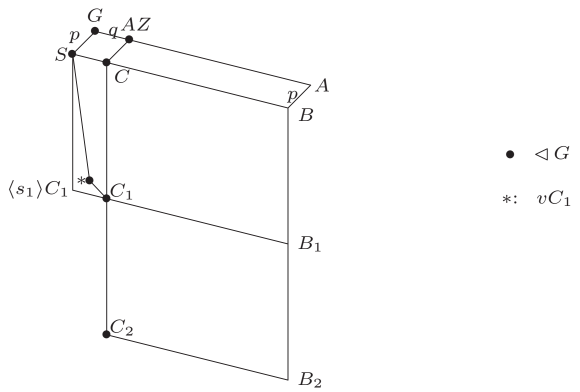
P läßt $s^q BZ$ fest, hat Fixpkt v.
Wegen $|\downarrow| = q^B$, $\langle s^q \rangle BZ = \langle v \rangle BZ$. $\mathcal{C}_G(v) \supseteq P$, $S^q BZ(r)$, also $S^q BZP = S^q AZ$. $v \in \operatorname{Ztr} \underbrace{\langle s^q \rangle AZ}_{\lhd G}$, $\operatorname{Ztr} \therefore \lhd G$; $Z \in \operatorname{Ztr} S^q AZ$, $[Z, A] = 1$, $A \lhd AZ \operatorname{sn} G$.

109/110

Hiernach ist $s^q \in S_G(A) \cap ZA$ 

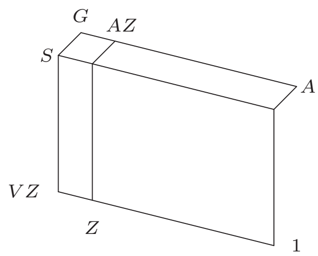
$\varphi : AZ \to AZ/B : \varphi(s^q) \in S_{\varphi(G)}(\varphi(A))$; ist wieder $\varphi(A, G)$ extremal wie (f), also $s^q \in B$.

Also:



(t) C ist einreihiger s-Modul, also wenn $C_1 := \underset{\lhd G}{[S, C]} = [s, C]$, so $C/C_1 \cong_G Z$, S/C_1 abelsch. $S_1 \cdot C_1 \lhd S$, $\langle v\rangle C_1 \lhd G$. Es ist $S_1^q \in C$, also $\in B_1$, wo v der Fixpunkt irgendeines $P \in p$-Syl G.

110/111



(u) Ist $V = \mathcal{C}_G(P)$, also $VC = S$, so ist $V^S = VC_1 \lhd G$.
Anm: Sonst $V^S \leq VC_2$ da $\unlhd G$. Dann $\exists_k VC_k \lhd G$, $k \geq 2$; $[S/C, S/VC_k] \leq C \cap VC_k = C_k$, aber $[V, C] = C_1$, also $C_1 \leq C_k$, Wid.

(v) $S \rhd VC_1 \rhd VC_2 \rhd VC_3 \rhd \cdots \rhd VZ \rhd$ sind A-invariant, Quotienten sind irred A-Mod wegen $[V, C_i] = C_{i+1}$ ist auch $V^{C_i} = VC_{i+1}$.

(w) $\langle S_1, P\rangle = G$ für jedes $P \in p$-Syl A. Denn sonst $S_1 = V(P)$, aber

$$VC_1 = V^S \underset{<\ S}{\lhd G},$$

$V^S A < G$, $\langle S_1, A\rangle < G$, Wid.

111/112

noch Axiomatik für Subnormalisator

(x) Zu jedem $a \in A$ und $g \in G - AZ$ gibt es wohl $g' \underset{\langle a,g\rangle}{=} g$ so, daß $(A \cap \langle a, g'\rangle) \lhd\lhd \langle a, g'\rangle$. In diesem Sinn ist also $G - AZ$ im Subn. von A.

<u>Verschiedene Definitionen von $\mathcal{S}_G(A)$</u>

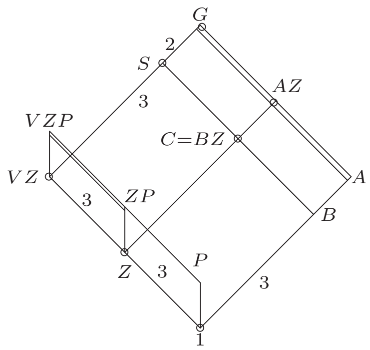
(1) <u>Ein Beispiel</u> Die Gruppe $G = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon & \xi & \eta \\ & \varepsilon & \zeta \\ & & 1 \end{pmatrix} \right.$ mit Elementen in $\mathbb{Z}_3$, $\varepsilon = \pm 1$

und $B := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & * \\ & & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $Z := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $V := \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}$;

$T := \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix} \right\rangle =$ obige S_1; $P := \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon & & \\ & \varepsilon & \\ & & 1 \end{pmatrix} \right\} = \{1, u\}$,

$(p = 2,\ q = 3)$ $A = BP$, $S = ZVB$

hat die Eigenschaften



$A \lessdot AZ$, $\ntriangleleft$, $Z = \mathrm{Ztr}\, S$, $[V, A] = 1$, $[V, C] = Z$. $C = BZ = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ & 1 & * \\ & & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

P wirkt fixpunktfrei auf C. Der einzige für A vollsinguläre (= extreme) Ausschnitt von G ist AZ/B. Der größte Subnormalisator von A mit Erbl. Eig I ist $(G{-}C)^{+}B$ mit II ist auch $(G{-}C){+}B$, mit II + III ist $(G{-}AZ){+}A$. Jedes El't von $S - C$ läßt ein P^g fest.

112/113

Sing. für A sind die Ausschnitte

Hier ist wohl $\bigcup A^g \subseteq \mathcal{S}^{II}(A, G)$, aber $A \notin \mathrm{sn}\, G$.

$P < H < G \Rightarrow H = VZP, VP, AZ, \langle c\rangle P$ mit $1 \neq c \in C$. $(vz)^a = vz^-$, $(vz \cdot vz)^a = v^-$. Singulär für P sind $VZ < VZP < G$, $\mathcal{S}_{\mathrm{II}\ \mathrm{III}}(P) = VP$. Hiernach ist

$$\underline{\mathcal{S}_{\mathrm{II}\ \mathrm{III}}(A) \cap \mathcal{S}_{\mathrm{II}\,\mathrm{III}}(A^v) = G - AZ} + P \not\equiv \underline{\mathcal{S}_{\mathrm{II}\,\mathrm{III}}(A \cap A^v)}$$

[Hinweispfeil auf die Beh. (b) in (2)]

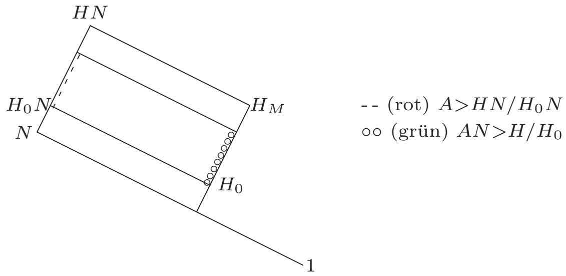
(2) Satz: Bezeichne $\mathcal{S} = \mathcal{S}^{\mathrm{II}\,\mathrm{III}}$ den größten (universell definierten) Nomalisator, der mit $\cap$ und $>$ verträglich ist. Dann gilt

(a) $N \trianglelefteq G \Rightarrow \mathcal{S}(A) \subseteq \mathcal{S}(AN)$

(b) $\mathcal{S}(A) \cap \mathcal{S}(B) \not\leq \mathcal{S}(A \cap B)$ i.A..

Bew:

(a) Sei $g \in \mathcal{S}(A)$, $NA \to H/H_0 =$ sing, $g \in H - M$,
$\underbrace{|NA > H/H_0|} = p \in \mathbb{P}$.
Wäre $= N > H/H_0$, so $NA > H/H_0 \trianglelefteq H/H_0$ Wid.,
also $N > H/H_0 = H_0/H_0$, $N \cap H \leq H_0$, $HN/H_0N \cong H/N_0$ sing für H_0N/N, also $g \in HN - MN$



wegen $\exists\ an \in H - H_0$ gilt $a \in HN - H_0N$, HN/H_0M sing f A Wid.

113/114

Noch Axiomatik für Subnormalisator

(3) Bei den Kettendefinitionen gilt: Ist $|A| = p$ und $\mathcal{N}(A) = A$, so ist $\mathcal{S}(A) = A$. Allgemeiner: Ist für $g \in G - A$ stets $A \cap A^g = 1$ und $\mathcal{N}(A) = A$, so $\mathcal{S}(A) = A$. (Es genügt schon, wenn es $a \in A$ so gibt, daß aus $a^g \in A$ folgt $g \in A$). Wenn $A \leq \mathcal{N}(B)$, $A \cap B = 1$, $\mathcal{C}_A(B) = 1$, so $\mathcal{S}_G(A) \cap B = 1$, ebenso für "Schichten" $B = B_1 \backslash B_0$.

(4) Aufgabe: Kriterien spezialisieren auf auflösb. G!

(5) Bemerkg: In A_5 sind die 5-Sylowgr. extrem.

(7) Eine 2-Untergruppe ist sn $\Leftrightarrow$ ihre Projektion in jede ungerade Diedergruppe ist trivial.

(8) Ein Vererbungstyp VI: $A \; e \; G$, $B \; e \; G \Rightarrow (A \cap B) \; e \; G$.

(9) Zusammenhang $\circ$ und $*$: $g(\circ a)^n = a[g^{a^n}(*a^-)^n]$, $g(\circ a^-)^n = a^- g^a(*a)^n$,
$N := |G| : g(\circ a)^N = \circ g(*a^-)^N$.
auch für $n = 0$ wenn $g(*a)^0 := ag$
Also $\mathcal{S}^* A = \mathcal{S}^0 A$

114/115

Zur Vollständigkeitseigenschaft von $\mathcal{S}_G A$

Sei (G, A, B, S) minimal mit $G = \langle B, S \rangle$, $A \operatorname{sn} B$, $S \operatorname{sn} G$, $S \subseteq \mathcal{S}_G(A)$ für einen Subnormalisator $\mathcal{S}$, der folgende Eigenschaften genießt:

Dann ist S^B I eine q-Gruppe oder II direktes Produkt zu S isomorpher einfacher nichtabelscher Gruppen; im Fall II : $|A| = p$, $|B| = p^\alpha$, $[S, A] = 1$, A läßt nach Thompson den Normalisator einer char. Ugr einer p-Syl Gr von G fest, und der Normalisator ist keine p-Gr. Also zentralisiert A eine Schicht PQ/Q von S, mit einer q-Gruppe $Q \neq 1$.

FORTS: 184, 187

115/116

Seite 116 leer

116/117

Zu Brauers Hauptsatz üb. Charaktere

1. Sei $M \subseteq G$, MG-invariant. Dann $M \leq G \Leftrightarrow \forall E$ elementar: $M \cap E \leq E$.
   Bew: $\chi(g) := |G|$ wenn $g \in M$, $\chi|g| = 0$ sonst: χ ist invariant, $\chi|_E = p$. reg Char $E \mid M \cap E$ für ein $p \in \mathbb{N}$. Also ist $\chi \in \mathrm{Ch}(G)$, $M = \ker \chi \trianglelefteq G$.

117/118

Probleme über Perm.-Gruppen

1. G sei vom Grade $n(n-1)$. Wann ist G induziert von einer Gruppe vom Grade n durch Wirkung auf die Paare?

118/119

Gruppen und Vollzyklen

haben nach Williamson MZ 1973 "äußere auflösbare Permutationsautomorphismengruppen".
Frage: Wann enthält der 2-Abschluß von G einen Vollzyklus? (Insb. wenn $|G| = p^\alpha$: Vermutlich genau dann, wenn es kein Imprim-System von p^2 Blocks gibt, auf dem G elementar abelsch operiert.)

119/120

Kann in einer unendlichen Gruppe die Vereinigung von <u>endlich</u> vielen Konjugierten <u>einer</u> echten Untergruppe schon die ganze Gruppe ergeben?

120/121

Allg. Bemerkg:

Gegenstand der Gruppentheorie müssten Systeme übereinander liegender Faktoren sein: (subnormale Quotienten)

Abstand in u(G):

$|A - B| = \max(\|A : D\|, \|B : D\|)$ wo $D = A \cap B$ und $\|A : D\|$ die Anzahl der Primfaktoren von $|A : D|$ (oder die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren).

121/122

Existenz von Normalteilern.

(1) Sei $H_0 \trianglelefteq H \leq G$. Genau dann ist $H_0 = H \cap G_0$ für $G_0 = H_0^G$, wenn die monomiale Darstellung M von G mittels H/H_0 so transformiert werden kann, dass alle H_0^g, $g \in G$, aus Permutationsmatrizen bestehen. Das geht, wenn es zu $\alpha \neq \beta$ stets ein $g \in G$ gibt, für das $(x_1, x_2) \xrightarrow{g} (x_\alpha, x_\beta)$ mit Faktoren $1'$.

122/123

Allg. Satz vom Sylowtyp: Enge Erzeugnisse

Def: Sei G Gruppe. $M_i \leq G$, $E = \langle M_i | i \in I \rangle$.
Schreibe $E = \langle M_i | i \in I \rangle_{\text{eng}} :\Leftrightarrow \forall e_i \in E : \langle M_i^{e_i} | i \in I \rangle = E$.
Zu betrachten sind vielleicht besser G-invar. Mengen $\mathfrak{S}$ von Teilmengen von G, derart, dass zu jeder Wahl von $S_1, \dots, S_n \in \mathfrak{S}$ ein $T \in \mathfrak{S}$ existiert, das zu jedem ν ein passendes $S_\nu^{g_\nu}$ enthält, mit passendem $g_\nu \in \begin{cases} \langle S_1, \dots, S_n \rangle, \text{ oder} \\ G \end{cases}$ und $T \leq \langle A_1, \dots, S_n \rangle$

123/124

Verwandt mit Subnormalisator

8.1.76 Zur Diss. von Bartels

$$B : \begin{cases} \underline{S_G(A) := \langle X | A \operatorname{sn} x \leq G \rangle} \\ A \operatorname{kks} B \Rightarrow \exists H \leq G : A \operatorname{sn} H,\ A \underset{H}{=} B \end{cases}$$

Sei $P \in \mathfrak{U}_p(G) = \{p\text{-Gruppen in } G\}$. Neue Beweise für Sätze von B:

(1) $A \operatorname{kks} B \Rightarrow S_G(A) = S_G(B)$. Denn $S_G(B) = S_G(A^h) = S_G(A)^h$, $h \in S_G(A)$.

(2) $(\text{kks})^\infty A = \{A^s | s \in S_G(A)\}$.
Bew: $C \in \text{kks}^\infty A \Rightarrow S_G(C) = S_G(A) =: S, C \in \{A^s | s \in S\}$.
$A \operatorname{sn} X \ni x \Rightarrow A^x \operatorname{kks} A \Rightarrow A^x \in (\text{kks})^\infty A$. Da $(\text{kks})^\infty G$-invar- Äq. Rel., ist $(\text{kks})^\infty A$ inv. unter x, X, S.

(3) $P^g \leq S := S_G(P) \Rightarrow g \in S_G(P)$

(a) Wenn $\langle P, P\rangle^g p$-Gr, so $\exists R \in p$-Syl G: $P, P^g \leq R$. Denn $P \leq R, R^{g^-} \in$ p-Syl S; $\exists s \in S : R^{g^- s} = R$, $g^- s \in \mathcal{N}(R) \leq S \Rightarrow g \in S$

(b) $P^g \leq S \Rightarrow \exists s \in G : \langle P, P^{gs}\rangle$ p-Gr $\underset{a}{\Rightarrow} gs \in S \Rightarrow g \in S$

(7) Nach Beweis gilt fürs Hyperzentrum H von G: $A \leq U \leq G$, $AH \lhd\lhd UH \Rightarrow A \lhd\lhd U$. Schärfer gilt: $A \leq G \Rightarrow A \lhd\lhd AH$. Gilt allg. für "$A$-Hyperzentr.".

(8) $\exists$ größtes $S(A) \lhd\lhd G$ derart, daß $A \lhd\lhd \langle A, S\rangle$.

124/125

Neu:

(4) $P \leq L \trianglelefteq G$, $P^* := \bigcap_{P \leq R \in p\text{-Syl } L} R$. Dann

$\underbrace{P \operatorname{sn} S := S_G}_{\mathrm{I}} \Leftrightarrow \underbrace{S = \mathcal{N}_G(P^*)}_{\mathrm{II}} \Leftrightarrow \underbrace{P^* \text{ pronormal in } G.}_{\mathrm{III}}.$

Für $L = G$ ist das B. Satz 3.1

II $\Rightarrow$ III : Wenn $\langle P^*, P^{*g}\rangle$ p-Gruppe, so $P^g \leq S$, $\underset{(3)}{\rightarrow} g \in S$, $P^{*g} = P^*$.

I $\Leftrightarrow$ II: gzz $\underline{S \leq \mathcal{N}(P^*)}$: (Umkehrg klar). Bew: Die Sylowgr von L, die P enthalten, sind die p-Sylowgruppen von $L \cap S \trianglelefteq S$, da $P \operatorname{sn} L \cap S$ ist.

III $\Rightarrow$ II: $P \operatorname{sn} X \Rightarrow \exists R \in p$-Syl $(L \cap X)$, $T \in p$-Syl L: $R \leq T$. Es ist $P \operatorname{sn} L \cap X$. $\forall x \in X : P^x \operatorname{sn} L \cap X$, $P^x \leq R \leq T$, $P \leq T^x \in p$-Syl L, $P^* \leq T^x$, $\langle P^*, P^*\rangle^x \leq T$.

(5) Aus (4) folgt B's Satz: Ist P nur in einer Sylowgr von P^G, so $P \operatorname{sn} S$. Bew: $P^* \in p$-Syl P^G, also pron in G. (= B.3.3)

(6) Für $P \leq H \leq G$ setze $P^{(H)} := \bigcap_{P \leq R \in p\text{-Syl } H} R$. Dann $P^{(G)} \cap H \leq P^{(H)}$ sowie

(a) $P \operatorname{sn} S \Rightarrow P^{(G)} = P^{(S)} = O_p(S)$

(b) $P \leq H \operatorname{sn} K \leq G \Rightarrow P \leq P^{(H)} = P^{(K)} \cap H$.

(c) Ist $P \leq H \operatorname{sn} G$, so gilt: $P \operatorname{sn} S_G(P) =: S \Leftrightarrow P^{(H)} \operatorname{sn} S$
Bew: "$\Rightarrow$" $P \leqq P^{(H)} \leq P^{(G)} = O_p(S)$. "$\Leftarrow$" $P \leq P^{(H)} \operatorname{sn} S$.

(d) $P \leq H \operatorname{sn} G \Rightarrow G = HS$, $P^{(H)}$ $P^{(G)}$

125/126

8.1.76

Noch zu Diss. Bartels

(7) A, B pronormal in G & $A \text{ks} B \Rightarrow A \trianglelefteq \langle A, B\rangle = AB$ pronormal ist G. Forts.: 152

Zu Sn^{II} G:

NB: (8) $g(\circ a^-)^n \cdot a^n = a^{n-1}g(*a)^n$, $n = 1, 2, \ldots$ wenn $g \circ a := g^- a^- g a$, $g * a = g^- a g$.

(9) Der Sockel von G beläßt jedes Element von G $g(\square a)^\infty$ in seiner Konjugiertenklasse innerhalb seiner subnormalen Hülle. Bew. wie in Hasse-Arbeit (und damit bei Induktionsschlüssen à la Bartels in seiner Äquivalenzklasse in G).

(10) Als Gegenbeispiel interessant: $C_3 \wr S_3$, $C_5 \wr S_3$ z.B. für:

(11) Aus $B \trianglelefteq A \leq G$ folgt nicht $B^{\cdot\cdot G} \trianglelefteq A^{\cdot\cdot G}$.

126/127

Verallg. d. Satzes von Maschke

15.4.76 Tag nach Emerit.

Kann man das auch mit dem Beweis von Curtis-Reiner kriegen?

(1) Satz: Die Gruppe G wirke (von rechts) auf eine abelsche Gruppe *Anmerkung:* [$\mathbb{Z}G$-“Modul” nach Curtis-Reiner S.50; dort GA] $A \oplus B$; sei $AG = A$; sei $H \underset{i}{\leq} G$, und

(α) $a \mapsto ia \in Bij(A, A)$. Sei $BH = B$. oder (128 (1)!)

(β) $b \mapsto ib \in Bij(B, B)$.

Dann $\exists B' : A \oplus B = A \oplus B'$, $B'G = B'$.

Beispiel: G wirke auf abelsches N mit endlicher Torsionsgr. T, $(|G|, |T|) = 1$. Dann $N = T \oplus S$, S torsionsfrei. $S = SG$ (Fuchs S. 187)

Bew: Definiere für jedes $g \in G$ $g_1 \in \operatorname{Aut} A$ durch $g_1 = g|A$, also $ag = ag_1$, $g_2 \in \operatorname{Hom}(B, A)$, $g_3 \in \operatorname{Aut} B$ durch $bg = bg_2 + bg_3$.
Dann gilt für $f, g \in G$: $(fg)_2 = f_2 g_1 + f_3 g_2$, $(fg)_3 = f_3 g_3$
gilt für $h \in H$, $g \in G$: $h_2 = 0$, $(hg)_2 = h_3 g_2$.

Für $R \leq G$, $|R \cap Hg| = 1$ f alle $g \in G$ setze

$$[R] := \sum r_3^- r_2 \in \operatorname{Hom}(B, A)$$

Ist auch S ein solches Repräsentantensystem, so ist $s_\nu = h_\nu r_\nu$, $\nu = 1, \ldots, i$, also $[S] = \sum_{\nu=1}^{i} (h_\nu r_\nu)_3^- (h_\nu r_\nu)_2 = \sum r_{\nu 3}^- h_{\nu 3}^- h_{\nu 3} r_\nu^2 = [R]$.
Setzt man als Re**???**abbildung $x := [R] \cdot \frac{1}{i} \in \operatorname{Hom}(B, A)$ (α) siehe 127 Zeile 2-3
$= \frac{1}{i}[R]$ im Fall (β)
so gilt $g_2 + xg_1 - g_3 x = 0 \in \operatorname{Hom}(B, A)$, daher für $b' := b + bx$ ($b \in B$), $b'g = (bg_3)' \in B'$.

(2) Gibt das Kriterien für Proj. oder Injektivität von G-Moduln?

(3) Gilt dieser Satz von Maschke auch für $\Omega \times G$-Moduln? ja

127/128

Noch Maschke

(1) Genügt in 127_1, daß i^- auf $A \otimes B$ existiert? Kaum*. Aber es genügt, wenn i^- auf $\mathrm{Hom}(B, A)$ existiert (oder auf $\mathrm{Hom}_G\,(A + B/A)$? und hierfür genügt es, wenn i^- auf B oder A existiert. Denn für $\eta \in \mathrm{Hom}\,(B, A)$ ist $i\eta = i_B\eta = \eta i_A$
$* \ B = C_p,\ A = C_{p^\infty}$

(2) Gilt Ähnliches für Wirkg von G auf $A \times B$, wo A, B nicht abelsch?

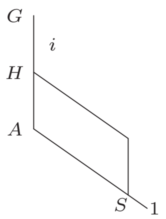
(2′) Verallgem. auf $A \times B$, $A' = 1$, B beliebig (!): 131 (2)
NB ist zu Maschke: Gorenstein S.68/9

(3) Erweiterung auf $H_\nu \underset{i_\nu}{\leq} G$, $d := \mathrm{ggT}(i_\nu)$, $\exists d^- \mid A$ oder B. Forts. 131-132

Umformulierung eines Zerspaltungs-satzes von Gaschütz:
Supplement-

(4) Satz. Man verstehe unter einem G-Schnitt S den Durchschnitt eines Supplements von $A(\lhd G)$ in G mit A. Sei $A' = 1$, $\exists i^-_{A/S}$ [für $i = |G : H|$, $A \leq H \leq G$.] Dann gilt:

(a) Genau dann ist S ein G-Schnitt, wenn S ein G-invarianter H-Schnitt ist.



(Bew "$\Leftarrow$": nach 129(1) zerfällt G/S über A/S.)

(b) Genau dann ist ein Supplement T von A in G Vertretergruppe (= Komplement) zu einem passenden G-Normalteiler in A, wenn $T \cap H$ Vertretergruppe zu einem passenden H-Normalteiler in A ist. Neu Bew: Dann gibt es zu dem G-Normalteiler $T \cap A$ einen komplementären H-Normalteiler, also nach 127(1) auch einen komplementären G- Normalteiler in A.

Nebenbemerkung: Das beantwortet: "Welche Supplemente zu A besitzen ein normales Kplt?"

128/129

Zerfallssatz von <u>Gaschütz</u> in der allgemeinen Formulierung von Huppert S.121

15.4.76

(1) Satz s.u.
Bew. mit Wirkungen: Sei $A \trianglelefteq G$, $A \triangleleft H \underset{i}{\leq} G$, $A' = 1$. H zerfalle über A, $H = AB$, $A \cap B = 1$. Dann $\exists \varphi \in \operatorname{End} H$, $h^\varphi \equiv h(A)$, $\varphi^2 = \varphi$, $A^\varphi = 1$.
Für $r, s \in G$, $Hr = Hs$ setze $\frac{r}{s} := s^-(sr^-)^\varphi r = s^-(Asr^- \cap B)r = A \cap s^- Br$,
Für $R, S \in \mathfrak{R} = \{$ Vertr. Syst. für $G : H\}$ setze $\frac{R}{S} = \prod_{G:H} \frac{r}{s}$, $r = Hx \cap R, \ldots$.

Dann ist $\frac{r}{s} \in A$ (denn $sr^- \in H$, $(sr^-)^\varphi \equiv sr^-\ (A)$), $\frac{r}{r} = 1$, $\frac{r}{s} \cdot \frac{s}{t} = \frac{r}{t}$, $\frac{ra}{r} = a$, $\frac{ar}{s} = r^- ar \frac{r}{s}$ $\frac{rg}{sg} = \left(\frac{r}{s}\right)^g$, $\frac{r}{s} = \frac{cr}{s}$, $c = c^\varphi$.

Also ist $\prod$ unabh von Reihenfolge, $\frac{R}{S} \in A$. Es gilt

(1) $\frac{R}{S} \in A$
(2) $\frac{R}{R} = 1$
(3) $\frac{R}{S}\frac{S}{T} = \frac{R}{T}$
(4) $\frac{Rg}{Sg} = \left(\frac{R}{S}\right)^g$
(5) $\frac{Ra}{R} = a^i$
(6) $\frac{cR}{S} = \frac{R}{S}$ $(c = c^\varphi)$
(7) $\frac{aR}{R} = \prod a^r$
(8) $\frac{Rxy}{R} = \left(\frac{Rx}{R}\right)^y \left(\frac{Ry}{R}\right)$
(9) $\exists i^- =: j$ auf A, $\varphi = \varphi_R : x \mapsto \left(\frac{Rx}{R}\right)^j \Rightarrow \varphi \in \operatorname{End} G$, $\varphi(a) = 1$, $\varphi(x) \equiv x\ (A)$
(10) $\frac{R}{S} = \frac{T}{U} \Rightarrow \frac{R}{T} = \frac{S}{U}; \frac{U}{S} = \frac{T}{R}$
(11) Benutzt man $B' = a^- Ba$ statt B, so wird
$(S : T)' = \prod(A \cap t^- a^- BaS)$
$= (aS : aT)$, also $(Tg : T)' = (aTg : aT) = (T'g : T')$

Setzt man $R \sim S$, wenn $\frac{R}{S} = 1$, so ist $\sim$ Äqu.relation auf $\mathfrak{R}$ und $R \sim S \Leftrightarrow \frac{R}{R_0} = \frac{S}{R_0}$ ($R_0 \in \mathfrak{R}$ gegeben).

G wirkt auf $\mathfrak{R}$ mittels $R \mapsto Rg$ und somit auf $\widetilde{\mathfrak{R}}$; A tra $\widetilde{\mathfrak{R}}$. Wähle $R_0 \in \mathfrak{R}$, setze $C := \{g \in G | R_0 g \sim R_0\} = G_{\widetilde{R_0}}$. Dann $C \leq G$, $CA = G$, da A tra $\widetilde{\mathfrak{R}}$; $C \cap A = 1$, da $a \in C \Rightarrow 1 = \frac{R_0 a}{R_0} = a^i$. Also:

<u>Satz (1)</u> Kpl $(A, G) \neq \emptyset$. Wenn $\mathfrak{A} \ni A \trianglelefteq G$, $A \leq H \underset{i}{\leq} G$, $\exists B \in \operatorname{Kp}(A, H)$, $\exists i_A^- \Rightarrow$ $\exists\, C \in\ \operatorname{Kp}(A, G)$.

<u>(1′) Zusatz:</u> Enthalten 2 Kpl C, D von A in G dasselbe $B := C \cap H = D \cap H$, so ist $C \underset{G}{=} D$. Denn φ hängt nur von B ab, und $C = G_{\widetilde{R}}$ für $R \leq C$, da $C \leq G_R$ wegen $\frac{Rc}{R} = 1$; denn ebenso $D = G_{\widetilde{S}}$ für $S \leq D$.
$H_{r_k} c = H_{r_l} \Rightarrow \frac{r_k c}{r_\lambda} = r_\lambda^- \underbrace{(r_\lambda c^- r_\kappa^-)^{\not\varphi}}_{\in C \cap H = B} r_\kappa c = 1$

129/130

Anderer Beweis mit "Zerfällungsgruppe" [laut Artin Zass. 133/4]

(1) Sei $N \leq G$; sei (2) $G^* = \{\sigma \in \operatorname{Bij}(G,G) | n(g\sigma) = (ng)\sigma \ \forall g, n \ \& \ \sigma$ induziert gleiche Permutation auf $G : N$ wie ein $s \in G\}$.

Also $G^* \leq \operatorname{Aut} G$, wobei ${}_N G = N$-Linksmenge. Setze $N^* = \{\sigma \in G^* : Ng\sigma = Ng \ \forall g \in G\}$. Dann $N^* \trianglelefteq G^*$, $\exists \varphi : G \to G^*$ natürl., inj., sodaß wir $G \leq G^*$ schreiben können, und es ist $G^* = N^* G$; wenn man ein Vertretersystem R für $G : N$ auswählt, ist der Stabilisator $C := G^*_R$ ein Komplement zu N^* in G^*. Es ist $N^* \cap G = N_G$ (normaler Kern).

(2) Dieses G^* ist $\cong N \wr P$, wo P die Permutationsgruppe ist, die G auf $G : N$ bewirkt. Es ist $N^* \cong \bigtimes^{|G:N|} N$

Existenz von Zerfällungsgruppen

(3) G^* ist also eine Zerfällungsgruppe für $G : N_G$; Wenn $N \trianglelefteq G$, so von $G : N$.

Frage:

(4) Allgemeinere Konstruktion für $N \leq H \in G$, $N \trianglelefteq G$?

130/131

15.4.76

Maschke $\Rightarrow$ Gaschütz

(1) Beweis für Gaschütz [JraM 190 (1952)] Zerfalls Satz mit eleganter monomialer Darstellung: Stelle G monomial über H dar. Ist $K \in \operatorname{Kpl}(A, H)$, $A' = 1$, $\exists |G : H|^-$ auf A, so Matrix $\mathcal{M}(g) = \underbrace{\operatorname{Diag}}_{D}(A)\overline{\mathcal{M}}(g)$, $\overline{\mathcal{M}}$ Koeff in K. Dann ist $D \lhd D\mathcal{M}(G) = D\overline{\mathcal{M}}(g) = \mathfrak{G}$ zerfällt.

$\exists B \leq D$, $B \lhd H$, nämlich Koeff(11) $= 1$. Da $B = B^H$, $\exists B' = B'^G$ mit $D = B \times B'$. $\mathfrak{G}/D \cong G$ zerfällt.

Gasch $\Rightarrow$ Maschke, so auch bei Huppert S.122

(2) G wirke auf $N = A \times B$, $H \underset{i}{\leq} G$, $A' = 1$, nicht $B' = 1$!

$A = A^G$, $B = B^H$, $\exists i_A^-$. Dann $A \times B = A \times C$; $C^G = C$.

Bew: semid. Produkte von N mit $G = (A \times B)H =: NH$; $N \trianglelefteq H \underset{i}{\leq} D$, $A \trianglelefteq NG$, $BH \in \operatorname{Kpl}(A, NH)$. Nach Gaschütz $\exists$ $C :=$ $\operatorname{Kpl}(A, NG)$. Dann ist $N \cap C$ ein G-normales Kplt von A in N.

131/132

[Unterpunkt (1) durchgestrichen:]

(1) Endliches G wirke auf $P \times R$, $P' = 1$. P p-Gruppe, $R \in \mathfrak{G}$. Eine p-Syl.Gr. von G lasse R fest, und G lasse P fest.
Dann $\exists\ S = S^G : P \times R = P \times S$. $\longrightarrow$ (2)
Bew. 132(2)

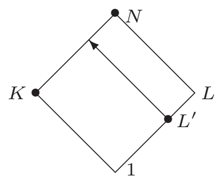
"Direkte Zerlegung von Gruppen mit [endl.] Operatorgruppen"

MASCHKE verallgemeinert auf S.137!

(2) Sei $H \underset{i}{\leq} G$. G operiere auf $N := K \times L$ mit $K = K^G$, $L = L^H$. Zu der (stets abelschen) Gruppe $K_0 = K \cap L^G = K_0^G \leq Z(K)$ gebe es ein abelsches $K_1 = K_1^G$ mit $K_0 \leq K_1 \leq K$, $(a \mapsto a^i) \in \operatorname{Aut} K_1$. Dann gibt es M mit $M = M^G$, $N = K \times M$.

Bew: Zuerst besser Fall II Zeile 1-3.

Bew: Fall I $K = K_1$ ab., $k \mapsto k^i \in \operatorname{Aut} K$.

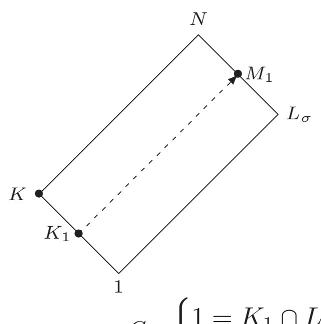


Es ist $L' = K' \times L' = N' = L'^G$; $\overline{N} := N/L'$. G operiert auf $\overline{N} = \overline{K} \times \overline{L}$, $\overline{K} = \overline{K}^G$, $\overline{L} = \overline{L}^H$. Auf $\overline{K} \cong K \exists i^- \in \operatorname{Aut} \overline{K}$.

Nach 127(1) $\exists \overline{M} \leq \overline{N} : \overline{N} = \overline{K} \times \overline{M}$, $\overline{M} = \overline{M}^G$. $\overline{M} := M/L' \Rightarrow M^G = M$, $\overline{KM} = \overline{K}\,\overline{M} = \overline{N}$, $L' \leq KM$, $KM = N$; $D := K \cap M \Rightarrow \overline{D} \leq \overline{K} \cap \overline{M} = \overline{1}$.

132/133

$D \leq L' \leq L$, $D \leq K \cap L = 1$; $N = K \times M$.
Bem: Für Fall I gilt vielleicht Beweis 127(1) <u>direkt</u>.
Fall II: K beliebig. $L \leq \mathcal{C}(K)$, $M_1 = \langle L^G \rangle \leq \mathcal{C}(K)$, da $K = K^G$. $K_1 = M_1 \cap K \leq Z(K)$, K_1 ist G-invariant.



$M_1 := K_1 \times L_\sigma$ ist H-inv. Nach I $\exists L = L^G : \begin{cases} 1 = K_1 \cap L \\ M_1 = K_1 \times L \end{cases}$, $KL = KK_1L = KM_1 \geq M$, $K \cap L = K \cap (M \cap L) = (K \cap M_1) \cap L = K_1 \cap L = 1$.

<u>Lit.</u>

(1) Ein eigentümlicher Split-Begriff bei ORE "Contributions ..." 1939, p. 445

(2) G.N.PANDYA, R.D.BERCOV: 1-cohomology and splitting of group extensions. Canad. M. Bull. 19, 369-71 (1976)

(3) P.Schmid: Group extensions and splitting modules. 15 pp MS, einger. bei MZ 11.5.78

(4) Gruenberg, K.W., cohom. topics in gr Th. Notes, Spring #143 (1970)

133/134

<u>GASCHÜTZ</u> allgemeiner

(1) Sei $A \trianglelefteq G$, $A' = 1$, $A \leq H_\nu \underset{i_\nu}{\leq} G$, $\nu = 1, \dots, n$, $i := \mathrm{ggT}(i_1, \dots, i_n)$. Für $\nu = 1, \dots, n$ existiere ein Komplement C_ν zu A in H_ν, $a \mapsto a^i$ sei ein Automorphismus von A. Dann exist. Kpl C zu A in G.

Bew: Definiere für $R_\nu, S_\nu \in \mathcal{R}_\nu = \{\text{Vertr. Syst. f. } G : H_\nu\}$, $\frac{R_\nu}{S_\nu}$ wie in $129(1) = \prod (A \cap s_\nu^- C_\nu r_\nu)$.

Wähle $j_1, \dots, j_n \in \mathbb{Z}$ mit $i = \sum i_\nu j_\nu$. Setze für $R := (R_1, \dots R_n)$, $S := (S_1, \dots, S_n)$

$$\frac{R}{S} := \prod_{\nu=1}^{n} \left(\frac{R_\nu}{S_\nu} \right)^{j_\nu} .$$

Dann ist $\frac{R}{R} = 1$, $\frac{R}{S}\frac{S}{T} = \frac{R}{T}$, $\frac{Rg}{Sg} = \left(\frac{R}{S}\right)^g$, $\left(\frac{Ra}{R}\right) = a^i$.
Also ist $C := K_{\widetilde{R}} := \{g \in G | \frac{Rg}{R} = 1\} \in \mathrm{Kpl}(A, G)$.

Bew: $g, f \in K \Rightarrow \frac{Rfg}{R} = \frac{Rfg}{Rg}\frac{Rg}{R} = \left(\frac{Rf}{R}\right)^g \left(\frac{Rg}{R}\right) = 1 \cdot 1$ und $\left(\frac{Rf^-}{R}\right)^f = \frac{R}{Rf} = \left(\frac{Rf}{R}\right)^- = 1^- = 1$ sowie $\frac{S}{T} = 1 \Leftrightarrow \frac{S}{R} = \frac{T}{R}$.

<u>Zusätze:</u>

(2) Verwendet man in (1) $a_\nu^- C_\nu a_\nu =: C_\nu^*$ anstelle von C_ν, so wird $C^* \underset{A}{=} C$.

Bew: nach 129(11) ist $\left(\frac{R_\nu g}{R_\nu}\right)^* = \left(\frac{a_\nu R_\nu g}{a_\nu R_\nu}\right)$, also $C^* = \mathrm{Stab}(R_1, \dots, R_n)\tilde{}^{\,*} = \mathrm{Stab}(\quad, \dots) \underset{A}{=} \mathrm{Stab}(R_1, \dots) = C$.

134/135

(3) Geht man von $C = \mathrm{Kpl}(A \leq G)$ aus und benutzt in (1) $C_\nu := C \cap H_\nu$, so wird im Fall $R_\nu \leq C : \mathrm{Stab}(R_1, \dots, R_n)\tilde{} = C$.

Bew: Für $c \in C$ ist $A \cap r_\nu^- C_\nu r_\nu c \in A \cap C = 1$, wobei $Ar'_\nu = Ar_\nu c$; $r_\nu, r'_\nu \in C_\nu$. Also $\left(\frac{R_\nu c}{R_\nu}\right)_\nu = 1$, $C \leq \mathrm{Stab}(R_1, \dots)\tilde{}$, $=$.

(4) Sind $C, C^* \in \operatorname{Kpl}(A \leq G)$ und ist $C_\nu = C \cap H_\nu \underset{A}{=} C_\nu^* = C^* \cap H_\nu$, so $C \underset{A}{=} C^*$.
Bew: Mit $R_\nu \leq C$, $R_\nu^* \leq C^*$ und nach (3) $C = \operatorname{Stab}(R_1, \dots)\tilde{}$, $C^* = \operatorname{Stab}(R_1^*, \dots)^{\sim *}$ und nach (2) ist $C^* \underset{A}{=} \operatorname{Stab}(R_1^*, \dots)\tilde{} \underset{A}{=}$.

(5) $C, C^* \in \operatorname{Kpl}(A \leq G)$, $\forall \nu \exists a_\nu : C^* \cap H_\nu = (C \cap H_\nu)^{a_\nu} \Rightarrow \exists a : C^* \cap H_\nu = (C \cap H_\nu)^a$. Bew. (4)

<u>Ergänzungen</u> 136(2), 181 Operatoren, 182 $C_\nu \nleq C$

135/136

16.4.76

Beispiel zu Gaschütz-Problem

(1) Auch unter den Voraussetzungen des Satzes von Gaschütz kann man <u>nicht jedes</u> Kplt von A in H ergänzen zu einem von A in G. Beispiel: $\begin{smallmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{smallmatrix}$, G die Gruppe $\leq S_9$, die die Zeilen miteinander beliebig permutiert, die Spalten aber <u>gerade</u>. $|G| = 3^2 \cdot 2$, $A = \{$jede Zeile im Ganzen fest$\}$, $A \underset{3}{<} H \underset{2}{<} G$. Zu $\langle z \rangle$, wo z Zeilen <u>und</u> Spalten zyklisch vertauscht, gibt es in G kein invertierendes Element, da es in den von G induzierten Permut. der Zeilenmenge keins gibt. Also gibts kein Klt zu A in G, das $\langle z \rangle$ umfaßt.
Hier ist die Klassenzahl $|\operatorname{Kpl}(A, G) : G| = 1$, aber $|\operatorname{Kpl}(A, H) : H| = \frac{9-3}{3-1} = 3$.
Im allgemeinen gilt also nicht $C_\nu \leq C$ in 135(1). Einfaches Beispiel: $G = C_p \wr C_2$, $A = \operatorname{Ztr} G$, $H = C_p \times C_p$.

Anzahl-<u>Satz</u>

(2) Unter den Vor. des allg Gaschütz Satzes 134(1) gilt

$$|\operatorname{Kpl}(A, G) : G| \leqq \prod_\nu |\operatorname{Kpl}(A, H_\nu) : H_\nu|$$

Bew: 134(2) und vermutlich sogar $\qquad \dots | \dots$

(3) Aufgabe: Gaschütz 1. Reduktionssatz erweitern wie (1). Vielleicht damit leichterer Beweis für 135(2)?

136/137

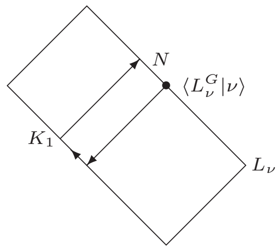
MASCHKE schärfer: XVI 23

(1) Endl. Gr. G operiere auf $N = K \times L_\nu$, $\nu = 1, \dots, n$, $K^G = K$. Es gibt $H_1, \dots, H_n \leq G : L_\nu^{H_\nu} = L_\nu$; für $i = \operatorname{ggT}\{i_\nu\}$ gelte: $i \cdot id \in \operatorname{Aut} K_1$ für ein K_1 mit $K_1' = 1$, $K_1 \geq K \cap \langle L_\nu^G | \nu \rangle$, also genügt z.B. $i \in \operatorname{Aut} Z(K)$.

Dann $\exists L = L^G : N = K \times L$.

Bew: wie 132 Fall I: $K' = 1$. 134(1) auf $K \trianglelefteq NG$ und die NH_ν anwenden: $\exists C_\nu \in \mathrm{Kpl}(K \text{ in } NH_\nu)$, also $\exists C \in \mathrm{Kpl}(K, G)$. $L := C \cap N$

Fall II wie 133 mit $K_1 := \mathrm{Ztr}\, K$, $N_1 = K_1$. $\langle L_\nu^G | \nu \rangle = K_1 L_\nu$.



Sonderfall:

(2) Auf $K = K^G \leq N = N^G$ wirke die Op.Gr. G.
Genau dann $\exists L = L^G$, $N = K \times L$, wenn zu jeder Sylowgruppe P_ν von G ein $L_\nu = L_\nu^{P_\nu}$ exist. mit $N = K \times L_\nu$.

(2′) Ein G-Modul ist sicher dann injektiv (proj.), wenn er als T_ν-Modul stets injektiv bzw. proj. ist.

FRAGEN (3)

(3′) Wann sind Operator-invar. Kplte konjugiert?

(3″) Betrachte $\frac{r}{s} := (s^\psi)^-(sr^-)^\varphi r^\psi$

(3‴) $\psi \in \mathrm{Abb}(G, G)$, $\varphi \in \mathrm{Hom}\, H$
Fastringe auf N anstelle der Wirkungsgruppe G.

137/138

$\triangleleft\triangleleft$ Funktorielles zu Normalisatorsätzen

6.5.76

Funktor: $G \mapsto G^\alpha \leq G$ so daß $\forall \sigma \in \mathrm{Iso} : G^{\alpha\sigma} = G^{\sigma\alpha}$. Dann $G^\alpha \trianglelefteq G$. Schreibe kurz $\alpha \in \Phi$

$$\alpha + \beta : \quad G^{\alpha+\beta} = G^\alpha G^\beta = \langle G^\alpha, G^\beta \rangle$$

$G^{\sum \alpha_i} := \langle G^{\alpha_i} \rangle$. $\alpha \leq \beta :\Leftrightarrow G^\alpha \leq G^\beta \ \forall G$.
Schreibe α nort β ("normalisiert") $:\Leftrightarrow \left(X \underset{\mathrm{sn}}{\overset{\sigma}{\hookrightarrow}} Z \underset{\mathrm{sn}}{\overset{\tau}{\hookleftarrow}} Y \Rightarrow X^{\alpha\sigma} \leq \mathcal{N}_Z(Y^{\beta\tau}) \right)$
$\mathcal{N}(\beta) := \sum \alpha$ (α nort β)
Programm: Welche funktoriellen Eigenschaften hat $\mathcal{N}(\beta)$? Wohl "fittingsch": $A \,\mathrm{sn}\, B \Rightarrow A^\alpha \in A^\beta$. Und welche hat $\mathcal{U}(\alpha) = \sum \beta$ (α nort β)?

Wohl “Gaschützsch”: $N \lhd G \Rightarrow (G/N)^\alpha = G^\alpha N/N$. Ziel: Dualitätssätze für geeignete α, β (wohl eben die fittingschen und gaschützschen).
Elementare Darstellung: α nort $\beta :\Leftrightarrow X \mathrm{ks} Y \Rightarrow X^\alpha \leq \mathcal{N}(Y^\beta)$ ks $=$ ko-subn.
$\mathcal{N}(\beta) = \sum \alpha \ \alpha$ nort $\beta \quad \mathcal{U}(\alpha)c = \sum \beta \ \alpha$ nort β
Dann ist α nort β gleichwertig mit $\begin{cases} \alpha \leq \mathcal{N}(\beta) \\ \beta \leq \mathcal{U}(\alpha) \end{cases}$

138/139

$\lhd\lhd$ Normalisator- u. Zentralisatorsätze

8.5.76

(1) Def: Sei $B \in \mathfrak{G}$. $\mathcal{C}[B] :=$ Klasse derjenigen $A \in \mathfrak{G}$, für die gilt: $A \cong A_1 \operatorname{ksn} B_1 \cong B \Rightarrow A_1 \leq \mathcal{C}(B_1)$. Ähnlich $\mathcal{N}[B]$. Ist $\mathfrak{X}$ eine Klasse von Gr., so $\mathcal{C}[\mathfrak{X}] = \bigcap_{X \in \mathfrak{X}} \mathcal{C}(X)$ usw.

und: $\mathfrak{F}$ Fitting-Formation, $A, B \operatorname{sn} G$, $A \wp B \Rightarrow (AB)^\mathfrak{F} = A^\mathfrak{F} B^\mathfrak{F}$ ($x \mapsto x^\mathfrak{F}$ ist “linear”)

(2) Ist $\mathfrak{G}$ die Klasse der endlichen p-Gruppen, so ist $A \in \mathcal{C}[\mathfrak{G}_p] \Leftrightarrow A \leq \mathcal{C}(P) \; \forall P \in \operatorname{sn} A \cap \mathfrak{G}_p$ mit $\operatorname{Kpf} A \cap \mathfrak{P} = \emptyset$.
Ferner ist $\mathcal{N}[\mathfrak{G}_p] = \mathcal{C}(\mathfrak{G}_p)$

Bew: Betrachte, wenn $A \operatorname{sn} G$, $A \operatorname{sn} G \times G_p$.

(3) Ist $p > 2$, so ist $\mathcal{C}[\mathfrak{G}_p] = \mathcal{C}[C_p]$

Bew: $A \in \mathcal{C}[C_p] \Rightarrow A \leq \mathcal{C}(A_p)$ da $A \leq \mathcal{C}$ soc A_p. (2)

(4) Für $p = 2$ ist $\mathcal{C}[\mathfrak{G}_2] \subset \mathcal{C}[C_2]$.

Bsp: Quaternionengruppe Q erweitert mit $C_3 =: G$.
Dann $G \in \mathcal{C}[C_2] \setminus \mathcal{C}[\mathfrak{G}_2]$, da $G_2 \not\leq Z(G)$.

(5) Also kann man nicht G von (4) mit der 2-Syl-Gruppe von S_4 derart ksn einbetten, dass die zyklische Untergr. der Ord 4 amalgamiert wird.

139/140

5.5.76

$\lhd\lhd$ Zentralisatorsätze

(1) Erstes Teilziel bei Zentralisatorsätzen: Untersuche **???** Paare $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ mit $[\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}] = 1$ (bei ksn Einbettung). Vollständigkeitseigenschaften von $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$? Dualität? “normal-persistent”

(2) Für $\mathcal{C}(\mathfrak{G}_2)$ braucht man: Jeder Autom. ungerader Ordnung einer 2-Gruppe G, der **???**Elemente von G fest läßt, ist trivial. Für $p > 2$ Gorenstein S.184. Genügt $Z_2(G)$?

NB: aus Gorenstein 184 folgt:

(3) $A = A' \operatorname{sn} G$, $B \operatorname{sn} G$, $C_2 \notin \mathcal{K}(B, A \cap B)$, $A \leq \mathcal{N}(X)$ für alle $X \in \operatorname{sn} G$ mit $A \cap B \leq X \leq A \cap B^A$ <u>und</u> $|X^2 A| \in \mathbb{P} \Rightarrow A \leq \mathcal{N}(B)$.

Frage: Entspr. auch für bel. B? (2) Sicher genügt $A \leq \mathcal{N}(X)$ wenn $X \in \operatorname{sn} A$; $A \leq X \leq B^A$ <u>und</u> $|X : A \cap B| \in \mathbb{PP}$ (Primzahlpotenz)

Sockel:

(4) $A \operatorname{sn} G \Rightarrow A \cap \operatorname{soc} G \leq \operatorname{soc} A$

Bew: OBdA $A \lhd\cdot\, G$. $N \cdot\!\lhd G \Rightarrow N \leq A$, od $N \leq Z_p(G)$ wenn $G/A \cong C_p$, oder einziger NT außerhalb A.

140/141

Perm.Gr.

11.5.76

Bahnlängen in faktorisierten Gruppen (G, Ω)

(1) $G = AB \Rightarrow \max|\omega^G| \leq \max|\omega^A| \cdot \underline{\min}|\omega^B|$.
Bew: $\alpha \in \Omega$. OBdA G tra Ω, $|\alpha^B| = \min|\omega^B|$, sonst $B \to B^g$. $|\alpha^G| \leq |\alpha^{BA}| \leq |\alpha^B| \max|\omega^A|$.

24.5.76

(2) <u>Kompositionsfaktoren:</u>
Sei $|\Omega| = n$; G tra Ω, $E \in \mathcal{K}(G)$; $E \notin \mathcal{K}(U)$ $\forall U < G$; $G/N \cong E$

(a) $\Rightarrow N$ intra. nilpot. [folglich] $N = 1$, $G \cong E$ oder E hat Darst. als tra Gruppe vom Grad d für ein $d \mid n$, $d < n$, wobei jeder Primteiler von n/d in $|E|$ aufgeht.

(b) Jeder <u>maximale</u>* Komp-Fakt. von G, der nicht als <u>Kompfaktor</u> von G_α auftritt, hat eine Darstellung mit Grad $d \underset{<}{\mid} n$.

* nicht Faktor eines anderen

141/142

$\lhd\lhd$ Verallgemeinerte Vertauschbarkeit

(1) $|G| < \infty$, $AB \operatorname{sn} G$. Genau dann ist für $J = \langle A, B \rangle$

$$J = ABABA$$

usw., wenn

$$J = J^{\mathfrak{N}} ABABA$$

ist.

Bew: Stets ist $J^{\mathfrak{N}} ABAB \cdots = AA^{\mathfrak{N}} B^{\mathfrak{N}} BAB$. Also "Vertauschbarkeitsstrafe" bleibt bei Hom. $J \to J/J^{\mathfrak{N}}$ erhalten.

(2) Ist $G \in \mathfrak{N}_2$, so ist für $A, B \leq G$ stets $ABA = AB$ (also $= \langle A, B\rangle$).

Bew:

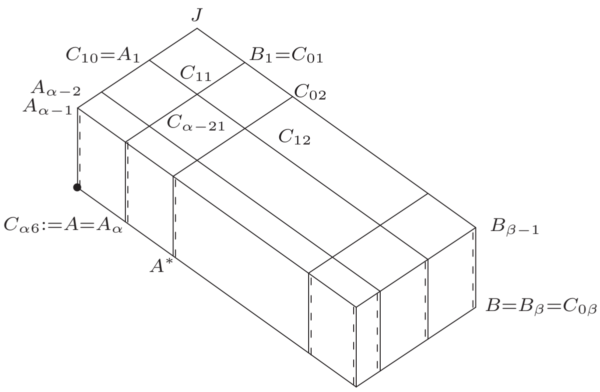
$$\begin{aligned} Aba &= Aab^a = Ab^a \\ b^a &= zb, \qquad z \in \mathrm{Ztr}\langle A, B\rangle \\ Aba &= Azb \\ z &= a_1 b_1 a_2 = a_2 z a_2^- = \in AB \\ Aba &= Azb \subseteq AB \end{aligned}$$

(3) Sind in $\mathfrak{G}$ alle Sylowgruppen von der Klasse ≤ 2, so sind alle SNT vertauschbar.

142/143

$\lhd\lhd$ Vertauschbarkeit

Satz (1): Das folgende Diagramm in $J = \langle A, B\rangle$ sei direkt und $\|$ bezeichne Abelsche Faktoren. Sei stets X^c der kleinste Normalteiler von X mit $X/X^c \in \mathfrak{N}_c$. Dann folgt aus $J = ABJ^c$ stets $J = AB$, wobei $[\alpha, \beta] := c := \binom{\alpha+\beta-2}{\alpha-1}$ wenn $|J - A| = \alpha$, $|J - B| = \beta$.



$\alpha \geq 2$
$\beta \geq 2$

Zusatz (2) <u>NB</u>: Mit Mezzanine kann man auf Vor $\|$ $\in \mathfrak{A}$ verzichten.

Bew: $A_{00}^{[\alpha,\beta)^{J[\alpha,\beta]}} = C_{10}^{[\alpha-1,\beta]} \cdot C_{01}^{[\alpha,\beta-1]}$, da

$[\alpha-1, \beta] + [\alpha, \beta-1] = \binom{\alpha+\beta-3}{\alpha-2} + \binom{\alpha+\beta-3}{\alpha-3} = \binom{\alpha+\beta-2}{\alpha-2} = [\alpha, \beta]$

So fortfahrend erhält man $J^{[\alpha,\beta]} \subseteq AB$.

Bessere Bezeichnung: wenden

Randbemerkung [besser von unten numerieren $A = A_0 < A_1 \ldots$ *]*

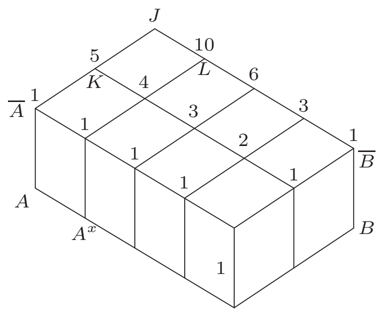
143/144

17.5.76

(1) Genauer: Die Zahlen c bei der Gruppe X geben an, welches X^c sicher in AB liegt.
[Von S. 145 übernommen:]
Ergänzung
zu 144(1):
Da nach Mezzanine im Fall der Normenkette auflösbar der Länge $\leq \min(\alpha - 1, \beta - 1) = d$ ist, gilt (unter den dort gezeichneten Vertauschbarkeitsvor. !)

$$|J - A| = \alpha,\ |J - B| = \beta \Rightarrow J^{c-d} \leq AB, \qquad c := \binom{\alpha + \beta - 2}{\alpha - 1}$$

Bew: und $J^{ncd} \leq A^n B^n$. Vermutlich gilt das aber auch für beliebige $A, B \operatorname{sn} G$.



Induktion: $J^{15} \leq K^5 \cdot L^{10} \leq ABL^{10} = AL^{10}B \leq AABB$.

Gebraucht wird dabei der Hilfssatz:
Ist $G = KL; K,\ L \trianglelefteq G$, so ist für $\kappa, \lambda \in N_0$:

$$G^{\kappa+\lambda} \leq K^\kappa L^\lambda$$

Schreibt man G nämlich additiv, Kommutierung wie Produkt, so ist $G^{\kappa+\lambda}$ $= (K + L)^{\kappa+\lambda} = \sum_{\rho+\sigma=\kappa+\lambda} K^\rho L^\sigma$;
entweder $\rho \geq \kappa$ (oder $\sigma \geq \lambda$), dann $K^\rho L^\sigma = [K^\rho, L^\sigma] \leq K^\rho \leq K^\kappa$ bzw. $\leq L^\lambda$, $G^{\kappa+\lambda} \leq K^\kappa + L^\lambda$.

2. Hauptsatz: $A \lhd^\alpha G$, $B^\beta < G$, $\langle A, B\rangle =: J$. Dann:

$$AB = BA \Leftrightarrow ABJ^c = BAJ^c, \qquad c := \binom{\alpha + \beta - 2}{\alpha - 1}$$

Bew mit Reduktion wie in Skript Mad.

Genauer: 145, 148. 150(3)

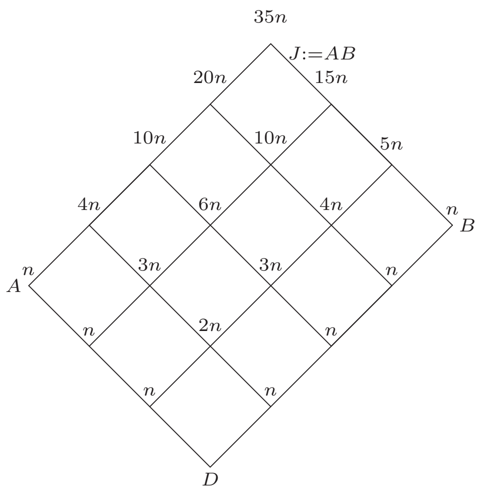
Das gibt eine Theorie der schwach distributiven Funktoren:
Wenn $K, L \lhd G$, so $(KL)^{\alpha^2} \leq K^\alpha L^\alpha \leq (KL)^\alpha$, z.B. $K^\alpha := K'$.
Aber $(KL)^{\alpha^{\kappa+\lambda}} \leq K^{\alpha^\kappa} L^{\alpha^\lambda}$.

Nebenbemerkung [Brewster J Alg. <u>36</u> (1975), 85-87, Stonehewer MZ 139, 45-54, Nilpotentresidual *]*

144/145

$\lhd\lhd$ Vertauschbark. Operat. $\mathfrak{N}$

1. <u>Satz</u>: Sind $A, B \operatorname{sn} G$, $D = A \cap B$, $A \operatorname{v} B$ <u>und</u> dieses Diagramm direkt, $|A - B| = k$, $|B - D| = l$,



so ist für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$J^{n\binom{\alpha+\beta}{\alpha}} \leq A^n B^n \leq J^n$$

Dabei $X^k := \bigcap_{X/N \in \mathfrak{N}_k} N$.

Das ist die erste? Verallg. von $(AB)^{\mathfrak{N}} = A^{\mathfrak{N}} B^{\mathfrak{N}}$ auf beliebige Gruppen. ($AB = BA$ ist vorausgesetzt!)

Bew: Schrittweise ist $X^{\cdot\cdot} \leq A^n B^n$. Beachte: $X \lhd Y \Rightarrow X^n \leq Y^n$, da $XY^n/Y^n \in \mathfrak{N}_n$.

Randbemerkung [Wohl ohne diese Vor. schon bei Brewster, J Alg. 36, 85-87 (1975) A criterion for the permutability of sn grps. s. auch Lennox, Proc. Camb. Ph. S. 72 (1972), 351-656, Roseblade, MZ <u>117</u>, 57-69, Stonehewer MZ 1977 *]*

145/146

$\lhd\lhd$ Vertauschbarkeit v

1. Frage $A, B \,\mathrm{sn}\, G,\ A/(A\cap B)^A$ „$\perp$“ $B/(A\cap B)^B \underset{?}{\Rightarrow} A \,\mathrm{v}\, B$

Bemerkungen:

(a) Die Bedingung bleibt erhalten bei Homomorphismen $G \underset{\varphi}{\to} \overline{G}$:

$$\overline{(A\cap B)}^{\overline{A}} \leq (\overline{A}\cap\overline{B})^{\overline{A}},$$

also mit $K = \ker\varphi$:

$$\begin{aligned}\overline{A}/(\overline{A}\cap\overline{B})^{\overline{A}} \text{ Bild von } \overline{A}/\overline{(A\cap B)}^{\overline{A}} &= AK/D^AK = AD^AK/D^AK \\ &\subseteq A/A\cap D^AK = \text{ Bild von } A/D^A\end{aligned}$$

(b) Nach 144(2) kann man $J = \langle A, B\rangle$ als nilpotent annehmen.

(c) Aus Vor. “$\perp$” folgt $C := [A,B] = D'\cdot[C,J]$. $D := A\cap B$

$$\text{und daher} \qquad C = D'^J \leq A'^J \cap B'^J$$

$$\text{sowie} \qquad J' = A'^J \cap B'^J = A'^J = B'^J$$

$$\text{daher auch} \qquad C = (A^g\cap B^h)\cdot[C,J] = (A^g\cap B^h)'^J$$

$$C\circ J = D'\circ J$$

Ferner $J\circ\circ J = J' = A\circ A + A\circ A\circ J,\ J' = J\circ A$.
Genauer: $\underline{C = D'[C,A][C,B]}$:

2. Hilfssatz: $A, B \,\mathrm{sn}\, G \in \mathfrak{N},\ A_0 \lhd A,\ B_0 \lhd B,\ A/A_0 \perp B/B_0 \Rightarrow [A,B] = [A_0,B_0]$ 146/147

$\lhd\lhd$

Bew: $C := [A,B],\ N := [C,A]\cdot[C,B] \trianglelefteq C$. mod N ist $[a_1a_2,b] = [a_1,b][a_1,b,a_2][a_2,b] \equiv [a_1,b][a_2,b]$, also $a\mapsto[a,b]$ ein Hom von A in C/N, ferner ist $b\mapsto[a,b]$ ein Antihom $B\to C/N$, also $(a,b)\mapsto[a,b^-]$ ein Bihom $\to C/N$. Also C/N abelsch und $(a,b)\mapsto[a,b]$ Bihom.

Nun liegt mod $[A_0,B_0]^C\cdot N$ ein Bihomom. von $A/A_0,\ B/B_0$ ein Bihomom. vor, also $\equiv 1$. Das gibt

$$\begin{aligned}C = [A,B] &\leqq [A_0,B_0]^C\cdot[C,A]\cdot[C,B] \leq C \\ &\Rightarrow C = [A_0,B_0]^C\cdot[C,A]\cdot[C,B] \\ &\Rightarrow C = [A_0,B_0]\cdot[C,A]\cdot[C,B] \qquad \text{da } C\in\mathfrak{N}\end{aligned}$$

Ist $A_0 = A_{00}^A,\ B_0 = B_{00}^B$, so ist mod N

$$[a_{00}^a, b_{00}^b] = [a_{00}, b_{00}],$$

also $[A_0,B_0] \not\equiv [A_{00},B_{00}]$; dann also $C = [A_{00},B_{00}][C,A][C,B]$.

(2) <u>Idee</u>: kann man statt $(\circ J)^n$ auch $(\circ A)^n$, $(\circ B)^n$ verwenden?

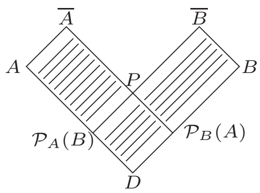
(3) Frage: $A, B \operatorname{sn} G$, $A \lhd^2 G \Rightarrow A \operatorname{vtb} B'$?

147/148

(1) Der HS 2 von S.144 dürfte sich etwa so verschärfen lassen: Seien $A \lhd^\alpha J$, $B \lhd^\beta J$ und in jedem homomorphen Bild $\overline{J}$ von $J = \langle A, B\rangle$, das höchstens die Klasse $\binom{\alpha+\beta-2}{\alpha-1}$ hat und dessen Torsionsuntergruppe primär ist ($\in \bigcup \mathfrak{G}_p$), sei $\overline{AB} = \overline{BA}$. Dann ist $AB = BA$.

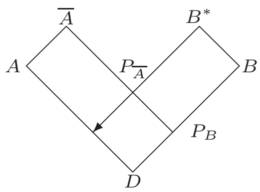
Zum Beweis genügte es wohl zu zeigen, dass das Produkt G von zwei Normalteilern dieser Art, mit Klassen α, β, einen Normalteiler von G enthält, der $G^{(\alpha+\beta)}$ umfasst <u>und</u> die Torsionsgruppe von $G \mod G^{\alpha+\beta}$.

(2) <u>Sind</u> $A, B \operatorname{sn} G$, aber nicht vtb., so ist mit $P := \mathcal{P}_A(B) \cdot \mathcal{P}_B(A) =: P_A P_B$, $\overline{A} = P_B A$, $\overline{B} = P_A B$ stets p-Gruppe, $P = \overline{A} \cap \overline{B}$, $P \operatorname{vtb} {}^A_B$ und $\overline{A}$ ist mit keiner Gruppe $Z : P < Z \leq \overline{B}$ vertauschbar.



/// Parallelogr.

Bew:



Bessere Darstellung hiervon auf 150(1)

$B^* := B\mathcal{P}_{\overline{A}}(B) = BP_{\overline{A}}$ gibt $A \cap P_{\overline{A}} \leq P_A \leq P_{\overline{A}} \cap A$.

148/149

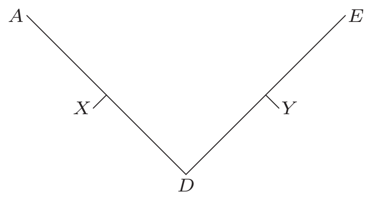
$\lhd\lhd$
27.5.76

Vertauschbarkeit, $|G| \leq \infty$

Daher $A \cap P_{\overline{A}} = P_A$, $B^* = P_A B$, $P_{\overline{A}} = P_A P_B$.

(2′) Also $\overline{A} : P$ mit $\overline{B} : P$ total unvertauschb. in folgendem Sinn: Forts.: (2″) s.u.

(3) Def. $A, B \le G$, $A \cap B = D$. Dann $A \overbrace{\text{tot unvtb.}}^{\text{tuv}} B$:$\Leftrightarrow$ Aus $D < X \le A$ folgt $XB \ne BX$, $D < Y \le B \Rightarrow AY \ne YA$.



(4) $|G| < \infty$, $A, B \operatorname{sn} G$, A tuv $B \Rightarrow A/D_A, B/D_B \in \mathfrak{N}$. Denn $A^{\mathfrak{N}} \le \mathcal{P}_A(B) \le D$, $B^{\mathfrak{N}} \le D$.

(5) Def. Schreibe kurz: $A : D \in \mathfrak{N}$, $B : D \in \mathfrak{N}$. Das lässt sich wohl auch ohne Übergang zu Faktorgruppen erkennen, ob $A : D \in \mathfrak{N}$: vermutlich gilt

(6) $B \operatorname{sn} A$. Dann $A : B \in \mathfrak{N} \Leftrightarrow$ zu jeder Anordnung o von $\mathbb{P}$ gibt es einen o-Sylowturm in $A : B$.

(2″) In Fig.(2) ist $k(\overline{A} : P) = \mathcal{K}(\overline{A} : P) = \mathcal{K}(\overline{B} : P) = k(\overline{B} : P)$.

Forts.: 158

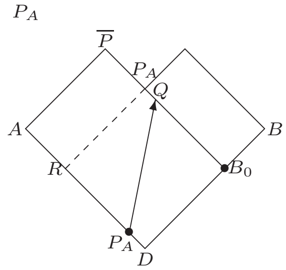
149/150

Vertauschbarkeit

27.5.76

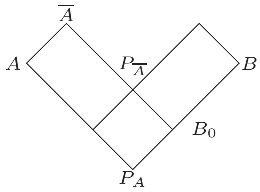
(1) <u>Vertauschbarkeit beliebiger Untergruppen:</u>

(1) $A, B \le G$, $D := A \cap B$, $D \le B_0 \le B$, $B_0 \operatorname{vtb} A$,
$\overline{A} := AB_0 \Rightarrow \underbrace{P_{\overline{A}}(B)}_{P_{\overline{A}}} = \underbrace{P_A(B)}_{P_A} B_0$; insbesondere: $P_A \operatorname{v} B_0$.



Bew: $Q := \langle P_A, B\rangle \operatorname{v} B$, $Q \le P_{\overline{A}}$, $R := A \cap P_{\overline{A}}$, $R \operatorname{v} B$, $R \le P_A \le P_{\overline{A}} \cap A = R$, $R = P_A = P_{\overline{A}} = RB_0 = P_A B_0$.

Also siehts so aus:



mit $P_{\overline{A}} = P_A B_0$.

(2) Sind $A, B \leq G$, so gilt für $P := P(A,B) := \mathcal{P}_A(B)\cdot\mathcal{P}_B(A)$: $\overline{A} : P(A,B)$tuv $\overline{B} : P(A,B)$ mit $\overline{A} = A\mathcal{P}_B(A)$, $\overline{B} = B\mathcal{P}_A(B)$, $P(A,B) = \overline{A} \cap \overline{B}$

(2′) insbesondere: $A, B \leq G \Rightarrow P(A,B) := \mathcal{P}_A(B)\mathcal{P}_B(A)$ Gruppe.

(3) 149(2′) zeigt: Sind $A, B \operatorname{sn} G$ und $D = A \cap B$ und $A : D$ tuv $B : D$, so sind die Strukturen von
$A : D$ und $B : D$ sehr ähnlich und so gut wie nilpotent.
Untersuchen! Kombin. mit 144(2).

150/151

Frame

(1) Frage von Baer: Läßt sich der Frame-Quotient q als Gruppenindex ... deuten?

(2) $\pm q = \Delta^2 \equiv 0, 1 \mod 4$, daher $q \not\equiv 2\ (4)$.

Bew mit iterierter Laplace-Entwicklung und daraus abgeleiteter "Alternante". Ist stets $q = \square$ ungerade?

(3) was bedeutet der Zusammenhang zwischen den Vertauschungsringen von G und $H < G$ für q_G, q_H?

(4) Wenn für alle "ungeraden" χ_λ (d.h. $e_\lambda \equiv 1\ (2)$) und alle p-El'te $g \in G$ gilt $\chi_\lambda(g) \in \mathbb{Q}$, folgt $q = \square$?

(5) λ fest. Erzeugen die $\chi_\lambda(g)$ für p-El'te schon den vollen p-Teil des Körpers, der von allen $\chi_\lambda(g)$ erzeugt wird?

Bew von Speiser "dualisieren" zwecks Abstiegs von $p^\alpha p^\beta \ldots$ zu p^α.
s. auch XI 355, XIII 131

(6) Siehe Vortragsnotizen Caltech 1964 + Cameron Prepr. '70, p.7

151/152

$\lhd\lhd$ Auszug aus Diss. Bartels
??? Sei $a \cdots \in G$.
Schreibe $a\varepsilon b :\Leftrightarrow a \underset{\langle a,b\rangle}{=} b \Leftrightarrow a \in \varepsilon_G b \Leftrightarrow b \in \varepsilon_G a$. Dann

1 $a\varepsilon b \Rightarrow \langle a\rangle^{\cdot\cdot G} = \langle b\rangle^{\cdot\cdot G}$

2 $\varphi \in \operatorname{Hom} G \Rightarrow (\varepsilon_G a)^\varphi = \varepsilon_{G^\varphi}(a^\varphi)$

3 $a \in b \Rightarrow \langle \varepsilon a\rangle = \langle \varepsilon b\rangle$

Def: $a \in H \leq G$: $\varepsilon_H^\infty a := \{b \in H \mid \exists h_i \underline{\in H} : h_0 = a_1 h_n = b_1 h_{i-1} \varepsilon h_i\}$

4 $a \varepsilon_G^\infty b \Rightarrow \langle \varepsilon_G a\rangle = \langle \varepsilon_G b\rangle$

5 $\langle \varepsilon_G a\rangle = \langle \varepsilon_G^\infty a\rangle$

Randbemerkung [besser gleich $\varepsilon_H a$ *]*

I <u>Satz</u>

$\langle a\rangle \in \mathfrak{G}_p \Rightarrow a^{\langle a\rangle^{\cdot\cdot G}} = \varepsilon_G^\infty a$, $\langle a\rangle^{\cdot\cdot G} = \langle \varepsilon_G a\rangle$.
Anm.: (a, G) Gegenb., $|G| = \min$. Dann

6 $\varepsilon_G^\infty a \subset a^{\langle a\rangle^{\cdot\cdot G}}$ (5)

7 $G = \langle a\rangle^G = \langle a\rangle^{\cdot\cdot G}$

8 $1 \neq N \trianglelefteq G \Rightarrow \langle \varepsilon_G a\rangle N = G$ (2,7)

9 G wirkt transitiv auf $\Omega := \{A_i\}$, $A_i = \varepsilon_G^\infty a_i$. $\sum A_i = a^G$

10 $|\Omega| > 1$, (a, G) Gegenb.

11 $\langle A_1\rangle$ läßt $A_1 \in \Omega$ fest

12 G wirkt treu auf Ω

Def: für $U \leq G$ setze $[U] := \{A_i \mid A_i \cap U \neq \emptyset\}$

13 $b \in A_i$, $b \in U < G \Rightarrow b^{\langle b\rangle^{\cdot\cdot U}} \subseteq A_i$.

152/153

14 $U < G$, $P p$-Syl $U \Rightarrow [U] = [P]$, $P \cap L \in p$-Syl $L := \langle b\rangle^{\cdot\cdot U}$, sonst Ztr P id Ω; 12

15 $U < G \Rightarrow [U] \subset \Omega$

16 $M \lessdot G$, $[M] \neq \emptyset$, P p-Syl $M \Rightarrow \mathcal{N}_G(P) \leq M$

17 $M \lessdot G$, $[M] \neq 0 \Rightarrow M$ enth eine p-Syl-Gr von G

18 P p-Syl $G \Rightarrow \exists_1 M_1 : P \leq M_1 \lessdot G$

19 $\exists_1 M : a \in M \lessdot G$.
Bew: $|M_1 \cap M_2|_p \max \mathcal{N}_G(R) \leq M_3$

20 $M \ntrianglelefteq G$

21 $a^g \in M$, $a^h \notin M \Rightarrow \langle a^g, a^h\rangle = G$, $a^g \varepsilon_G a^h$

22 $\exists a^h \notin M$ (7)

23 $\forall x \in G : a^x \varepsilon^2 a$

24 $\varepsilon_G^\infty a = a^G = a^{\langle a \rangle^{\cdot\cdot G}}$, Wid.

II HSatz

$a \in G \Rightarrow$

(a) $\langle \varepsilon_G a \rangle = \langle a \rangle^{\cdot\cdot G}$

(b) $a^{\langle a \rangle^{\cdot\cdot G}} = \varepsilon_G^\infty a$

Vereinfachter Bew: $a = xx_1 \cdots x_r$ (Primärkomp.), $H := \langle \varepsilon_G a \rangle$

25 $\langle x \rangle^{\cdot\cdot G} \underset{I}{=} \langle \varepsilon_G x \rangle = \langle x, t \mid t \in \langle x, x^t \rangle \rangle$

26 $\langle x \rangle^{\cdot\cdot G} \leq H = \langle a, s \mid s \in \langle a, a^s \rangle \rangle$

27 $\langle a \rangle^{\cdot\cdot G} = \langle \langle x \rangle^{\cdot\cdot G}, \langle x_1 \rangle^{\cdot\cdot G}, \dots \rangle \leq H \leq \langle a \rangle^{\cdot\cdot G}$ (a) ✓

28 H wirkt tra auf $\Omega = \{\varepsilon_H^\infty$-Klassen in $a^H\}$, aber $\langle \varepsilon_G a \rangle$ läßt die Klasse von a fest: $|\Omega| = 1$.

FRAGE Ist $\operatorname{soc} G \leq \mathcal{N} a^{\langle s \rangle^{\cdot\cdot G}}$?

153/154

$\mathcal{L}\pi G \dots$

Def: $\mathfrak{X}$ eine Klasse von Gruppen: $\mathcal{L}\mathfrak{X}G := \{L \leq G \mid L \in \mathfrak{X}; L \trianglelefteq M \in \mathfrak{X}, M \leq G\} \Rightarrow L = M$.

(1) Wenn $\mathfrak{X}$ ("endlich"-)normal-persistent ist, so folgt aus $L \in \mathcal{L}\mathfrak{X}G$: L besitzt eine Subnormalisatorgruppe in G, nämlich den Normalisator $\mathcal{N}_G(L)$: $L \operatorname{sn} U \leq G \Rightarrow L \trianglelefteq U$.

(2) <u>Sylownormalisatortürme</u>: geg. geord. $\pi = \{p_1, \dots, p_n\}$,
$\overline{T \in \mathcal{T}_\pi(G) :\Leftrightarrow \exists 1 \leq T_1} \leq T_\nu \leq \cdots \leq T_n = T$:
$T_\nu \trianglelefteq T$, $T_\nu / T_{\nu-1} \in p_\nu$-Syl $\mathcal{N}_G(T_{\nu-1})/T_{\nu-1}$

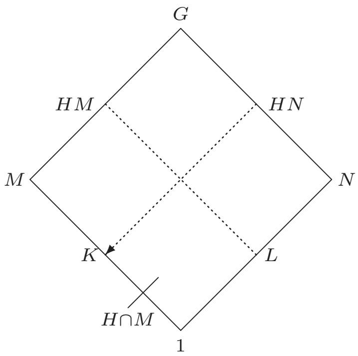
?! (2a) Sylownormalisatoren und -Türme sind vert. mit Hom. Damit gilt:

(3) $T \in \mathcal{T}_\pi(G) \Rightarrow T \in \mathcal{L}_\pi(G)$ (π-Hallg. seines Norm'tors)

(4) T intravariant in G

(5) Wenn $H \leq G = M \times N_2$ und $H \neg G/M \in \mathcal{T}(G/M)$, $H \cap M \in \mathcal{T}(M)$, so ist auch $H \neg G/N \in \mathcal{T}(G/N)$ und $H \cap N \in \mathcal{T}(N)$.

Bew:



$H \cap M$ wird von HN normalisiert, daher auch von $HN \cap M =: K$. Da $H \cap M \in \mathcal{L}(M)$, ist $H \cap M = K \in T_\pi(M)$, daher $HN/N \in \mathcal{T}(G/N)$.

154/155

24.6.76
Insb. ist $|H \neg G/N| = |H \neg M|$ und daher $|H \neg N| = |H \neg G/M| = L := HM \cap N$, andererseits $H \neg N = H \cap N \leq L$, also $= L \in \mathcal{T}_\pi(N)$ wegen $G/M \cong N$ und $HM/M \in \mathcal{T}_\pi(G/M)$.

Satz: "Kompositions-π-Turm-Gruppen" Def 1:

(1) $H \leq G$ habe für <u>eine</u> Komp.Reihe G_ν von G alle Projektionen $H \neg G^\nu \in \mathcal{T}_\pi(G^\nu)$. Dann gilt das Gleiche für jede Komp.Reihe von G. Ferner ist H invariant in G (Bew. wie MS 1963, S.5**???**). Die Existenz solcher H folgt wie MS 1953 S.5.2

(2″) $\operatorname{sn} G$ projiziert sich homomorph in $\operatorname{sn} H$ MA 1953, 4.7

(3) H ist <u>erblich</u> große intravariante π-Gruppe (bezgl Übergang zu Subnormalfaktoren von G).

(4) Je zwei H_1, H_2 mit der Eigenschaft 1 sind konjuguiert in G. Falls G auflösbar, sind die H die π-Hallgruppen. Genauer: 278

(2′) $H \neg F_1 \times F_2 = (H \neg F_1) \times (H \neg F_2)$ wenn $F_1 \times F_2$ ein Subnormalfaktor von G.

Bew für einfache F_i: 154 5)

FORTS: 159, XVII 23

---

(3) FRAGE: Kann man $\mathcal{M}\pi G$-Theorie auf geeignete andere verbandsähnliche Untergruppenmengen ausdehnen?

155/156

27.6.76

$$\mathcal{M}_{\mathfrak{S}\pi}(G)$$
$$:= \{\text{max. auflösb. } \pi\text{-Untergruppen von } G\}$$

(1) Sind die Projektionen der $A \leq \mathcal{M}_{\mathfrak{S}\pi}(G)$ in Hauptfaktoren H von G die direkten Produkte der Proj. in die einfachen Faktoren von H? Gilt für $\operatorname{sn} G \to \operatorname{sn} A$ die Homomorphie?

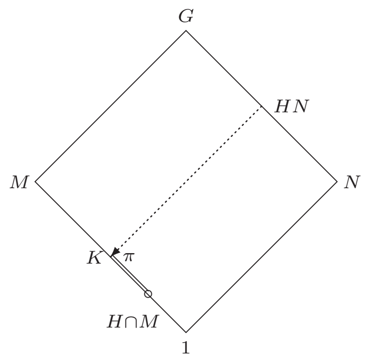
(2) Untersuchen: $A \cap P$, wo $A \in \mathcal{M}_{\mathfrak{S}\pi}(G)$, P ein einköpfiger perfekter Subnormalteiler von G. (Wie stellt sich der Sockel von P^G dar?)

(3) $N \trianglelefteq G \not\Rightarrow \mathcal{L}_\pi G \neg N \subseteq \mathcal{L}_\pi N$.
Bsp: $G = \operatorname{Sym} 4$, $\pi = \{2, 3\}$, $A = 2\text{-Syl}\, G$, $N = \operatorname{Alt} 4$.

156/157

Juli 1976

1. Jede erblich große Gruppe hat die Projektionseigenschaft.
Besser: $G = M \times N \geq H$, $H \in \mathfrak{G}_\pi$, $H \cap M \in \mathcal{L}_\pi M \Rightarrow HN/N \cong H \cap M$, $HM/M \cong H \cap N$.



Bew: $HN \leq \mathcal{N}(H \cap M)$, $H \cap M \lhd HN \cap M \in \mathfrak{G}_\pi$

2. Wenn man von einer ersten $\mathbb{P}$-Sylow-Turmgr von G eine zweite (mit anderer Anordnung) bildet usw., so kommt man schließlich zu einer intravarianten nilpotenten Untergruppe *durchgestrichen [* [die jeden Kompositionsfaktor trifft. Nein, z.B. $G = S_3$].

Was ergibt sich bei Verwendung von Kompositions-$\mathbb{P}$-Turmgruppen nach 155(1)?
$*$ s.u.

3. Die in 2 beschriebene nilpotente Gruppe G^* hat die Eigenschaft:
$A \operatorname{sn} G \Rightarrow A = (A \cap G^*)^{\cdot\cdot G}$. Und wenn $A, B \operatorname{sn} G$, so $A \underset{G}{=} B \Leftrightarrow A^* \underset{G}{=} B^*$, oder wenn $A \cap G^* \underset{G}{=} B \cap G^*$. Zum Konj.-Problem für sn s. Briefwechsel mit HO, Okt. 74

4. $*$ Wenn G sowohl ein aufsteigender wie ein absteigender Sylowturm ist, so ist G nilpotent.

157/158

Fusion

1. Frage: Seien x, y p-Elemente, $x \underset{G}{=} y$. Ist dann $x \underset{D}{=} y$ mit $D := \bigcap \mathcal{N}ZJ(P)$? $x, y \in P \in p$-Syl G

   Vertauschbarkeit lokal subnormaler Gruppen

2. Forts. von 149: Vielleicht kann man zeigen $A = A', B$ ℓsn $G \Rightarrow AB = BA$ durch eine Erweiterung des Satzes $A, B \operatorname{sn} G < \infty \Rightarrow A^{\mathfrak{N}}B = BA^{\mathfrak{N}}$ auf unendl. Gr (Stonehewer, Lennox, Roseblade, Wilson?! s. Lit Brewster. Nützt Hiltons lokals.?)

3. lokal subnormale Ugr sind seriell.
   Denn E endl Erzeuger, $E \leq A^E \Rightarrow \exists A_0$ endl erz, $E \leq A_0^E$, $\exists A_1 : A_0 \leq A_1 \operatorname{sn} G$, $A_1 \leq A$, $E \leq A_1^E$, also $E \leq A_1 \leq A$

   Nun **???** -Krit wie Kappe

158/159

Vermischte Einfälle

1. Lineare Automorphismen einer (irred.?) linearen Gruppe sollten analog zu den Permutationsautom. einer PGr untersucht werden.

2. π-Sylow-Türme: $T \leq H \in G$, $T \in \pi$-Syl-Türme $(G) \Rightarrow T \in \overset{\prime\prime}{\cdots}(H)$, daher $\Rightarrow T$ intravariant in H.

3. Intravarianz [*Verweis auf Unterpunkt 2 und auf folgendes*]
   kann so verallg. werden: U ist $\underset{\text{Sym}}{\underset{\uparrow}{G}}$ - intr. in A, wenn $A \cdot \mathcal{N}_G(U) = G$

   Es gilt:

   (a) $U \leq A \leq B_i \leq G$, $\cup B_i$-intr. in $A \Rightarrow \cup\langle B_i\rangle$-intr. in A.

   (b) A intr. $B \Rightarrow A^B \trianglelefteq B$

   (c) Beim Existenzbeweis für Ugr mit geg Projektionen in Komp-Reihe (K-Faktoren?) genügt es, in isomorphen KFaktoren "entsprechende" große π-Untergruppen vorzuschreiben (die "normalisator-intravariant" sind), d.h. in perfekten einköpfigen Subnormalteilern A_i wählt man Gruppen U aus, die N_i-π-intrav. sind, mit $N_i = \mathcal{N}_G(A_i)$, d.h. $T_i \leq M_\pi(N_i) \Rightarrow A_i^{\{N_i T_i\}} = A_i^{\{N_i\}}$.

159/160

$\mathcal{M}_\pi G$
Ergänz. zur Diplomarbeit von J.v.Below

17.10.76

1 zu (4.3): $G/K \in D_\pi^* := \{X \mid A \leq X \Rightarrow A \in D_\pi\}$ $\forall M_i \in \mathcal{M}_\pi(G)$:

$$M_1 \underset{G}{=} M_2 \Leftrightarrow M_1 \cap K \underset{G}{=} M_2 \cap K$$

Denn $M_1 \cap K = M_2 \cap K =: D \Rightarrow D \in \mathcal{L}_\pi K$. $\mathcal{N}_G(D)/\mathcal{N}_K(D) \in D_\pi$. $\langle M_1, M_2^u \rangle \pi$-$\pi'$-reihig.

1′ Folge $G/K \in D_\pi^s \Rightarrow m_\pi(G) \leq l_\pi(K)$

Hilfss. 1″ Sei $K \trianglelefteq G$, $D \in \mathcal{M}_\pi(G) \neg K$. Genau dann ist $M_1 \underset{G}{=} M_2$ für alle $M_i \in \mathcal{M}_\pi(G)$ mit $M_i \neg K = D$, wenn $m_\pi(\mathcal{N}_G(D)/D) = 1$, also $\mathcal{N}_G(D)/D \in D_\pi$. Falls $D \in \mathcal{L}_\pi(K)$, so genau wenn $\mathcal{N}_G(D)K/K \in D_\pi$.
Folge:

Satz 2. Sei $K \lhd G$. Genau dann induziert die Abbildg. $M \mapsto (M \cap K,\ M \neg G/K)$ eine Bijektion von $\mathcal{M}_\pi(G) : G$ auf $[\mathcal{M}_\pi(K) : K] \times [\mathcal{M}_\pi(G/K) : (G/K)]$, wenn $\mathcal{M}_\pi(G) \neg K = \mathcal{M}_\pi(K) \subseteq G - J(K)$, d.h.
$$\begin{cases} \forall M \in \mathcal{M}_\pi(G) : & M \cap K \in \mathcal{M}_\pi(K) \\ \forall L \in \mathcal{M}_\pi(K) : & \mathcal{N}_G(L) \cdot K = G. \end{cases}$$ Bew. 1″ + 2′.

160/161

noch zu v. Below

2′ Sei $M \in \mathcal{M}_\pi(G)$, $K \trianglelefteq G$, $M \cap K \in \mathcal{L}_\pi(K)$, $M \cap K$ G_π-intravariant $[g \in G, \langle g \rangle \in \mathfrak{G}_\pi \Rightarrow \exists_k \in K : (M \cap K)^g = (M \cap K)^k]$. Dann $M \neg G/K \in \mathcal{M}_\pi(G/K)$.

2″ $K \in E_\pi^n$, $\mathcal{M}_\pi(G/K) \subseteq \mathfrak{S} \Rightarrow M \neg G/K \in \mathcal{M}_\pi(G/K)$.

3 Sei $K \lhd G$, $G/K = O^\pi(G/K)$. Genau dann ist für $K \leq A \leq G$ stets $m_\pi(A) = m_\pi(K)$, wenn $\mathcal{M}_\pi(G) \neg K = \mathcal{M}_\pi(K) \subseteq J_G(K)$ G-intravariant & $\forall$ $A/K \in D_\pi$.
Bew: alle A mit $K \underset{\pi'}{\lhd} A$ betrachten!

$\uparrow$ d.h. $L \in \mathcal{M}_\pi(K) \Rightarrow G = K\mathcal{N}(L)$

4 Falls $K \underset{p}{\lhd} G$, $p \in \mathbb{P}$, so ist $\mathcal{M}_\pi(G) \neg K \backslash \mathcal{M}_\pi(K) \subseteq J_G(K)$, und diese $M \neg K$ lassen sich eindeutig zu einer max π-Ugr von G verlängern.

5 Aus $M \in \mathcal{M}_\pi(G)$, $A \leq G$, $A^M \in \mathfrak{G}_\pi$ folgt $A \leq M$.

161/162

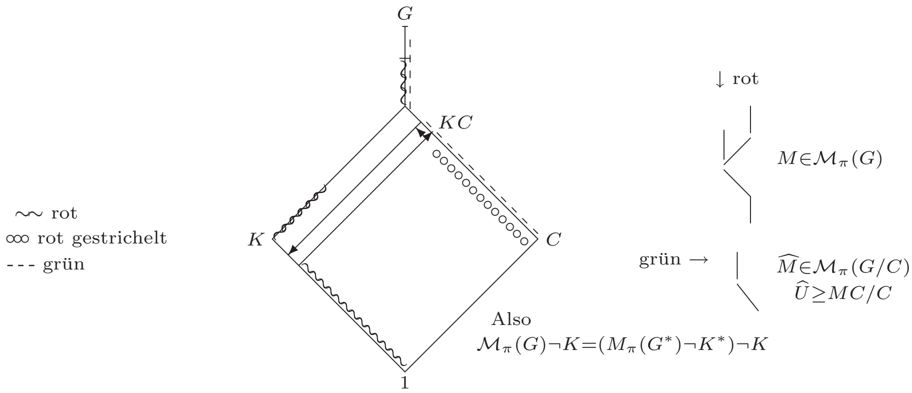
18.10.76

$\mathcal{M}_\pi(G)$

Im folgenden sei π eine "abgeschlossene" Klasse von Gruppen, so dass $A \leq B \in \pi \Rightarrow A \in \pi$; $A \trianglelefteq B \in \pi \Leftrightarrow B/A \in \pi,\ A \in \pi$.

(1) Man kann die Bestimmung von $\mathcal{M}_\pi(G)$ auf die von $\mathcal{M}_\pi(A)$ für geeignete echte Ausschnitte A von G zurückführen, außer wenn G nur einen Fuß $N \trianglelefteq G$ hat (und $G/N \in \pi$? ist) *Anmerkung: [* s. hierzu 166 (1)! *]*. Es genügt für ein $K \trianglelefteq G$, $K \neq 1$, alle Maximalschnitte $\mathcal{M}_\pi(G)\neg K$ zu finden. OB sei $G_{\mathfrak{S}} = 1$, also $\operatorname{soc} G$ perfekt. Sei $1 \neq K \lhd G$, $\mathcal{U}_\pi(K) \cap \pi \neq \emptyset$. Suche $\mathcal{M}_\pi \neg K$.
Bew: Bestimmung von $\mathcal{M}_\pi(G)\neg K$ für mehrfüssiges G:

Satz 2. Wenn $1 < C \trianglelefteq G$, $C \cap K = 1$, setze $G^* := G/C$ $K^* := KC/C$. Dann reduziert Bijektion zwischen $\mathcal{M}_\pi(G)\neg K : G$ und $(\mathcal{M}_\pi(G^*)\neg K^*) : G^*$ die Aufgabe auf $K^* \lhd G^*$.



Also kann man $C = 1$, G als einfüßig annehmen ($K \cdot\!\lhd G$).

162/163

$\mathcal{M}_\pi(G)$

Satz 3 Sei $G \lhd K = K_1 \times K_2 \times \cdots \times K_r$, G tra $\Omega := \{K_1, \ldots, K_r\}$, $\mathcal{M}_\pi(G)\neg K_1 = \mathcal{M}_\pi(K_1) \subseteq \operatorname{Intr}_{G_1}(K_1)$ (d.h. $M_i \neg K_1 =: L_i \in \mathcal{M}_\pi(K_1)$, $L_1 \underset{G_1}{=} L_2 \Rightarrow L_1 \underset{K_1}{=} L_2$). Dann erhält man je genau einen Vertreter für $\mathcal{M}_\pi(G) : G$ so: Belege $K_1, \ldots, K_r$ auf alle Arten mit $\{1, 2, \ldots, m\}$, $m := m_\pi(K_1)$; Setze $\{1_1, \ldots, 1_m\} := \mathcal{M}_\pi(K_1) : K_1$. Wähle aus jeder G-Klasse von Belegungen eine Γ aus und wähle $D_\Gamma := L_1 \times L_2 \times \cdots \times L_r$ mit $L_\rho \underset{G}{\in} \Lambda_{\mu_\rho}$ wenn $\Gamma = (\mu_1, \ldots, \mu_r)$. Sei G_Γ der Stabilisator von Γ in G. Dann ist D_Γ G_Γ-intrav. in K, kann also zu genau $m_\pi(G_\Gamma/K)$ wesentlich verschiedenen max. π-Ugr von G_Γ ergänzt werden, diese $\in \mathcal{M}_\pi(G)$. Folge:

3′
$$m_\pi(G) = \sum_{\substack{\Gamma\in \text{ Vertr.-Syst} \\ \text{der Belegungen}}} m_\pi(G_\Gamma/K)$$

Folge:

Satz 4 Ist in jedem nichtab. Faktor F von G jede große $\begin{cases}\pi\text{-Ugr} \\ \rho\text{ - ''}\end{cases}$ maximal und intravariant mit $m_\pi(F) = m_\rho(F)$, so ist $m_\pi(G) = m_\rho(G)$. Z.B: alle $F \in \{A_5, C_\rho, \pi \cap \{2,3,4\} = 2 = \rho \cap h\}$.

163/164

$\mathcal{M}_\pi(G)$

18.10.76

4′ Für jeden Fakt. F von G sei $\mathcal{L}_\pi(F) = \mathcal{M}_\pi(F) \leq J_G(F)$.
'' '' $\mathcal{L}_\rho(F) = \mathcal{M}_\rho(F) \leq J_G(F)$.
'' '' $m_\pi(F) = m_\rho(F)$
Dann ist $m_\pi(G) = m_\rho(G)$.

Allgemeinere Situation: auf $K = K_1 \times \cdots \times K_r$, $\mathcal{L} = L_1 \times \cdots \times L_r$ wirke G/K als Primgr genau wie M/L. Vergleiche Anzahl der Ordnungen der max π-Ugr.

4″ Sei $K \lhd G$, $K = K_1 \times \cdots \times K_r$, $\mathcal{L}_\pi(K_\rho) = \mathcal{M}_\pi(K_\rho)$ intrav. Sei $K \lhd H$ und $H/K \underset{\Omega}{\cong} G/K$, mit $\Omega = \{K_1, \ldots, K_r\}$. Dann $m_\pi(G) = m_\pi(H)$.
Bew. 163 (3)

4‴ Z.B. m_π (zerfallende) $= m_\pi$ (nichtzerfallende Erweiterung), m_π monomiale - Perm Gr, wenn Out $K_i \in \mathfrak{S}$ gibt Ersetzung durch Kranzprodukte mit kanonischer Entsprechung $\mathcal{M}_\pi(G)$ **???** G nämlich.

5 Eine monomiale Gruppe mit auflösbaren Koeff-Gr. hat dasselbe m_π wie die entsprechende Permut.-Gr.

164/165

$\mathcal{M}_\pi(G)$

Frage 1 Kennzeichnung von $\mathcal{M}_\pi(G) \neg G/N$? bei gegebenen G, N

'' 2 Wenn G/K zerfällt und $M \in \mathcal{M}_\pi(G)$ ist, zerfällt dann $M/M \cap K$?

(3) Stets $N \trianglelefteq G \Rightarrow \mathcal{L}_\pi(G) \cap \mathcal{M}_\pi(?) \subseteq \mathcal{M}_\pi(G)$.

(4) $\mathcal{M}_\pi(G)\neg G/N$ besteht nicht aus ausgez. Gruppen:

Zu jedem $B \in \mathcal{U}_\pi(F)$ gibt es G, $N \trianglelefteq G$, $A \in \mathcal{M}_\pi(G)$ mit $G/N \cong F$, $A\neg G/N = B$.

Bew: $|F : B| = n$; stelle F trans auf $\{1 \ldots n\}$ mit $B = F_1$ dar. Wähle M mit $m_\pi(M) \geq 2$. In $M \underset{n}{\wr} F =: G$, das auf $N := \overbrace{M \times \cdots \times M}^{n}$ wirkt, wähle $A := (X^1 \times X^2 \times \cdots \times X^2)B$ mit $X^1 \underset{M}{\neq} X^2$, $X^i \in \mathcal{M}_\pi(M)$.

Frage 5 Ist $\mathcal{M}_\pi(G)\neg G/N$ eingeschränkt, wenn man N oder die von G auf $N_1 \times \cdots \times N_n$ induzierte Perm. der Faktoren kennt?

Verweis auf nächste Seite

165/166

$\mathcal{M}_\pi(G)$

24.10.76

Frage: 165 (5) Idee:

[*Verweis auf vorherige Seite*]

1 Vielleicht kann unter den Vor. von 164 (4″) keine π-Ugr von G/N mit größeren Bahnen existieren als wie $M\neg G/\widehat{N}$ hat? $\widehat{N} := \{g \mid N_\rho^g = N_\rho \forall_\rho\}$. Dazu könnte der Übergang zu zerfallenden Erweiterungen nach 164, 4‴ nützlich sein; und vielleicht führt das doch zu $G/K \in \mathfrak{G}_\pi$ in 162 (1), und mit 161 (3) sogar auf $G/K \cong C_{p^\alpha}$, $p \in \pi$!

2 Vielleicht genügt statt Schreier die folgende Vermutung W:

Wirkt eine π-Gruppe automorph auf eine einfache Gr., so läßt sie eine π-Ugr $\neq 1$ fest, wenn es solche gibt.

Oder die folgende? " Ist E einfacher Faktor von G und $\widehat{E}$ die auf ihm durch $\mathcal{N}_G(E)$ induzierte Automorphismengruppe, so ist $m_\pi(\widehat{E}/E) = 1$. "

3 $A \in \mathcal{L}_\mathfrak{X} G$, $A \operatorname{sn} G \Leftrightarrow A$ ist die größte $\mathfrak{X}$-Ugr von G (G ist $\frac{\mathfrak{X}}{\pi}$-closed).

166/167

25.10.76

Idee:
2-trans Konstituenten von Untergruppen

1 einer primitiven Gruppe G müssen zu starken Einschränkungen für die Vertauschungsmatrizen führen, indem man für ein Δ, auf dem $H \leq G$ 2-tra ist, die Bilder Δ^g betrachtet, für die $|\Delta \cap \Delta^g| \geq 2$: Hierzu Diss Rinderspacher 1976, Satz 5.10

$$\begin{array}{|ccccccccc}
0&1&1&\dots&1&1&&&\\
1&0&1&\dots&1&1&&&\\
&&&\ddots&&&&&\\
1&1&1&&0&1&\dots&1&1\\
1&1&1&&1&0&&1&1\\
&&&&\vdots&&&&\\
&&&&1&1&&0&1\\
&&&&1&1&\dots&1&0
\end{array}$$

Satz 2 Sei G eine endl. tra. PGr., $|\Omega| = n$. $U \leq G$ besitze einen 2-tra Konstituenten vom Grad k und sonst nur Konstituenten, die diesen irred Bestandteil nicht enthalten (z.B. alle Grade $< k$ haben). Dann gilt:

1. G pri $\Rightarrow G$ 2-tra
2. $k > \frac{n}{2} \Rightarrow G$ pri

Bew

1. mit Zerschneidung

bei b) genügt pri statt 2-tra

167/168

Bemerkungen zur Diss. Rinderspacher:

28.10.76

1. R. Satz 7.4 sagt: $A, B \lessdot G$, $D := A \cap B$, $D_G = 1$, $n \in \mathbb{N}$. Dann

   1. $G = (AB)^{n+1} \cup (BA)^{n+1} \Rightarrow D_{(AB)^n} \cap D_{(BA)^n} = 1$

   aber b) $G = ABABAB \not\Rightarrow D_{AB} \cap D_{BA} = 1$.

   Dahinter steckt schärfer und allgemeiner:

2. Seien $A, B \leq G$, $D := A \cap B$, $|G| \leq \infty$. Setze $G_k := (A \cup B)^k$, $k = 1, 2, \dots$, $D_k = D_{G_k}$. Dann ist (mit $g * h := g^- hg$)

$$D_k(*G_{2k})^{2k} \subseteq D,$$

daher, falls z.B. G endlich und $G_{2k} = G$: $D \operatorname{sn} G$. Kurzer Beweis: 4

Bew: Q_k, P_k bedeute $\overbrace{ABA\dots}^{k}$ oder $\overbrace{BAB}^{k}$. Dann ist etwa $P_{2k} * D_k \subseteq \overbrace{AB\dots}^{k}\overbrace{A\dots}^{k} * D_{\underbrace{AB\dots}_{k}} \subseteq Q_k * D$, also $G_{2k} * D_k \subseteq G_{2k-1}$ allg. $G_l * D_k \subseteq$

$G_{2(l-k)-1}$, ebenso

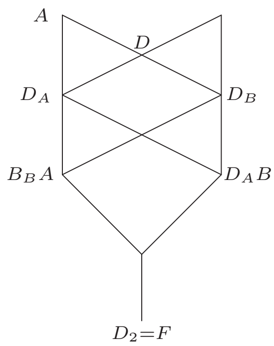
$$\begin{aligned}&G_{2k-1} * D_k \subseteq G_{2k-2} \text{ uw:}\\ &G_{2k}(*D_k)^k \subseteq G_k\\ &G_{2k}(*D_k)^{2k} \subseteq G_k * D_k \subseteq D, \text{ weiter also:}\\ &G_{2k}(*D_k)^{2k+1} \subseteq D_k \operatorname{sn} G \text{ wenn } G = G_{2k}\end{aligned}$$

168/169

3. Beispiel: $A, B \lessdot G$, $D = A \cap B$, $D_G = 1 \Rightarrow$

   (a) $G = (A \cup B)^2 \Rightarrow D_A \cap D_B = 1$

   (b) $G = (A \cup B)^6 = (AB)^3 \cup (BA)^3 \Rightarrow D_{ABA} \cap D_{BAB} = 1$



4 "der" Bew. für 2: etwa $k = 2$
$F^{a_1b_1}$, $F^{b_2a_2} \operatorname{sn} D$, F sn $\langle F^{a_1b_1a_2b_2}, F\rangle$ wenn $G_4 = G$, so $F \operatorname{sn}\langle F, F^g\rangle$.
Genügt: $F^G \subseteq G_4$

4′ Aufgabe: Verallgemeinerung von 2 auf A, B, C

Idee 5 FRAME-QUOTIENT
sollte auch aus der Wirkung von $g \mapsto g^m$ auf die <u>Konjugiertenklassen</u> bestimmbar sein.

169/170

$\lhd\lhd$

1.11.76

1. G habe Kompositionsreihe. Sei $A \leq B \leq G$. Dann $A \leq B_{\cdot\cdot G} \Leftrightarrow A^{\cdot\cdot G} \leq B$.

FRAGE 2 $a, b \in G \in \mathfrak{F}$. $C := \{b^g \mid g \in G\}$. Was ist $\langle c(*a)^\infty\rangle_{c\in C}$? Vielleicht $= \langle a\rangle^{\cdot\cdot H}$ mit $H = \langle a, C\rangle$?

3 $A \leq G$ heiße glm. attraktiv, wenn $G(\circ a)^n \leq A$ für ein n.
Im extremalen Gegenbeispiel für $\mathfrak{e} \subseteq sn$ gilt: A, B att., $S(A) \neq S(B) \Rightarrow \underbrace{D_A \cap D_B}_{E} = 1$ wo $D = A \cap B$
denn sn A, B; $S(A) = S(E) = S(B)$ da E att.

NB Sogar $D_{\cdot\cdot A} = 1$ oder $D_B = 2$

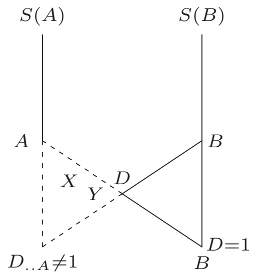
4 Der Durchschnitt von glm attraktiven Untergr. $A_i \leq G$ von beschränkter Stufe ist glm attraktiv von derselben Stufe.

FRAGE 5 $\exists$ Kriterium dafür, dass für geg. $a, b \in G$ gilt: $b \in a^{\cdot\cdot G}$? Ist $A^{\cdot\cdot G} = \bigcup_{g \in G} A^{\cdot\cdot \langle A, g\rangle}$?

170/171

durchgestrichen:

~~[Es ist sogar stets $D_{\cdot\cdot A} = D_{\cdot\cdot B} = 1$, wenn $D = A \cap B$ mit $S_G(A) \neq S(B)$. Bew: OB D Maximalschnitt. Ist $D_{\cdot\cdot A} \neq 1$, so D sn A da D psn G. Sei $X \not\subseteq S(B)$, aber $Y \subseteq S(B)$; $t \in X - Y$, $D \leq B \cap B^t$, $S(B) \neq S(B^t)$, also $D = B \cap B^t$ wegen Maximalität. $S(A) = S(B)$.]~~



4. Vielleicht ist die folgende von Interesse:
$A\, \mathfrak{e}\, G \Rightarrow A \cap A^g$ sn A. Fra: Gilt das nur, wenn A sn G oder $A \in \mathfrak{N}$ oder $A \in I$ ist?

5 Die Bedingung $\forall \quad X : A < X \leq G \Rightarrow A^X < X$ wird zur Deszendenz führen.

FRAGE 7 Ist jede attraktive maximale Ugr. normal?

8 A glm attraktiv in G, $A \ni e \neq 1$, $A_1 := \bigcap_{e \in A^g} A^g \Rightarrow A_1$ glm attraktiv in G, und aus $e^g \in A_1$ folgt $g \in \mathcal{N}(A_1)$. Folge: $e \in H \leq G \Rightarrow \mathcal{N}_H(A \cap H) > (A \cap H)$.

171/172

Vtbarkeit und Serialität

9. Kriterium für A ser G: Hinreicht: $\forall X \subseteq G\ \forall H \leq G (B := \langle A^x \rangle < H,\ \langle A^x \rangle \ntrianglelefteq H \Rightarrow \exists h \in H : H^G \neq H,\ BB^h = B^h B)$

Frage 9 Frage: Ist das auch notwendig für A ser G?

Frage 10 Hat jeder deszendente Gruppe eines $G \in \max_U$ einen Subnormalisator?

Frage 11 Sind deszendente attraktive Untergruppen subnormal (z.B. in einer Noetherschen Gruppe)?

12 $A \leq B$, $A\,\mathrm{sn}\langle A, B^g\rangle_{\forall g} \Rightarrow A\,\mathrm{sn}\,G$, denn $A\,\mathrm{sn}\langle A, A^g\rangle$.

Folge:

13 $A, B \leq G$, $A\,\mathrm{ksn}\,B^g\ \forall_g \Rightarrow A \cap B\,\mathrm{sn}\,G$.
Bew: 12 auf $A \cap B$ statt A

172/173

14 Wenn B ($\leq G \in \mathfrak{F}$) im kleinen Subnormalisator von A liegt, so ist $A \cap B\,\mathrm{sn}\,B$.

15 PermGr als $\lhd\lhd$: Die transitiven Kostituenten von $A\,\mathrm{sn}\,G$ sind alle zueinander ähnlich, wenn G pri, endlich.

Frage 16 Gilt was Entsprechendes für die irreduziblen Bestandteile eines $A\,\mathrm{sn}\,G$, wenn G eine irreduzible lineare Gruppe ist? Käme als Thema für Herrn Schmidt Stg (bei Roggenk.) in Frage

17 Normalsysteme sollten abweichend von Kurosch usw. so definiert werden: Kette bei der für jeden (Dedekindschen) Schnitt $\{U_i\}$, $\{O_j\}$ gilt:

$$\langle U_i \rangle \trianglelefteq \bigcap O_j.$$

Entsprechend und zur alten Def. gleichwertig: Serialität. Aber Homomorphie-Invarianz sollte eingebaut werden!

FRAGE 18 Hat jede projektiv-serielle Untergr. einen Serialisator?

173/174

noch $\lhd\lhd\lhd$

Frage 19 Kriterien für serielle Persistenz einer Untergruppeneigenschaft?

Frage 20 Kriterien für Subnormalität in auflösbaren Gruppen.

Frage 21 Bilden die deszendenten Untergruppen einer Noetherschen Gruppe einen Verband?

Frage 22 Hat in einer Noeth. Gruppe jede proj.-deszendente Untergruppe einen "Deszensor"?

Frage: Sei $A \leq G$ endlich. Ein Subnormalisator von A enthalte zu jeder (maximalen?) zyklischen Untergruppe von G eine Erzeugende. Ist dann $A \lhd\lhd G$?

174/175

Untergruppen-Funktoren

Def: $\mathfrak{G}_0 = \{$endl. Gruppen$\}$
$\psi \in \Psi_o :\Leftrightarrow \forall G \in \mathfrak{G}_0 \exists_1 G^\psi \leq G$, verträgl mit Isom.
= Ugr Funktoren

(1) $G^\psi \trianglelefteq G$

Def (2) ψ (besser ξ passend zu $\mathfrak{X}$) heißt stabil, wenn
$\begin{cases} \text{monoton} : A \leq B \Rightarrow A^\psi \leq B^\psi \\ \text{idempotent } A^{\psi\psi} = A^\psi \end{cases}$

NB: Thompsons J ist idempotent, aber nicht monoton

Satz (3) (a) $\psi \in \Psi$ stabil $\mathfrak{X} := \{X \in \mathfrak{G}_0 \mid X^\psi = X\}$. Dazu 177.1. Dann $G^\psi = \langle X \leq G \mid X \in \mathfrak{X}\rangle$ $(=: G_\mathfrak{X})$

(b) Umgekehrt bestimmt jede Klasse $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}$ isom. abg., $\mathfrak{X}$ ist $\langle\cdot\rangle$-abg, so einen stab Fktor ψ,

(c) und falls $\mathfrak{X}$ $\langle\rangle$-abg, so gilt: $\mathfrak{X}$ entsteht aus ψ gemäß a)

Bew:

a) $X = X^\psi \leq G \Rightarrow X = X^\psi \leq G^\psi$ $G^\psi \geq \langle..\rangle$, $G^\psi = G^{\psi\psi} \in \mathfrak{X}$

b) $G^\psi := \langle X \leq G \mid X \in \mathfrak{X}\rangle \Rightarrow (A \leq B \Rightarrow A^\psi \in B^\psi)$ & $\Rightarrow A^{\psi\psi} = \langle X \leq A^\psi \mid X \in \mathfrak{X}\rangle \geq \langle X \leq A \mid X \in \mathfrak{X}\rangle = A^\psi$

Satz (4) ψ stabil, $A \leq G$, $A^\psi \leq B \leq G \Rightarrow A^\psi \leq B^\psi$
Bew: $A^\psi = A^{\psi\psi} \leq B^\psi$

Satz (5) Vor

(a) $A \leq G \leq \operatorname{Sym}\Omega$

(b) ψ stabil

(c) $A^\psi \leq G_\alpha \Rightarrow |G_\alpha^\psi| = |A^\psi|$

Dann gilt:

α) $A^\psi \leq G_\alpha \Rightarrow A^\psi = G_\alpha^\psi \trianglelefteq \mathcal{N}$

β) $A^\psi \leq G_{\alpha\beta}$, $\alpha^t = \beta \Rightarrow t \in \mathcal{N}(A^\psi)$

γ) $\Gamma := \Omega_{A^\psi}$ ist Block von G und $G(\Gamma) = \mathcal{N}(A^\psi)$
Bew: $A^{\psi t} = G_\alpha^{\psi t} = G_\beta^\psi = A^\psi$

175/176

Vor. 5c ist z.B. erfüllt, wenn jedes $G_\alpha \geq A^\psi$ ein hom. Bild von A ist und $A^{\psi\varphi} = A^{\varphi\psi} \forall \varphi \in \mathrm{Epi}(A, G)$

1. Sei Ψ stabil; dann glw. wenn ψ zu $\mathfrak{X}$ (= erz. abg!) gehört:

   I $\forall G \in G_0$, $\forall \varphi \in \mathrm{Hom}G$: $G^{\psi\varphi} = G^{\varphi\psi}$

   II a) Ist $N \trianglelefteq G$, $\mathrm{Suppl}(G, N) = \{G\}$, $\frac{G}{N} \in \mathfrak{X}$, so $G \in \mathfrak{X}$. $\rightarrow$ d.h. jede kleinste Aufsp. einer $\mathfrak{X}$-Gr. ist $\in \mathfrak{X}$

   b) 〃 〃 , $G \in \mathfrak{X}$, so $\frac{G}{N} \in \mathfrak{X}$

   Bew I $\rightarrow II_b$: $G \in \mathfrak{X} \Rightarrow G^\psi = G \Rightarrow G^{\varphi\psi} = G^\varphi \Rightarrow G/N \in \mathfrak{X}$

   $I \rightarrow II_a$: $(G^\psi)^\varphi = (G^\varphi)^\psi = \left(\frac{G}{N}\right)^\psi = \frac{G}{N}$, $N \cdot G^\psi = G$, $G^\psi = G$.

   $II_{a,b} \rightarrow I$: $G^{\psi\varphi} = \langle X \leq G \mid X \in \mathfrak{X}\rangle^\varphi \leq \langle Y \leq \frac{G}{N} \mid Y \in \mathfrak{X}^\varphi \subseteq \mathfrak{X}\rangle \subseteq G^{\varphi\psi}$.

   Sei N zugeh. Kern, H minimales Urbild von $G^{\varphi\psi}$ in G. Dann $\left(\frac{H}{N}\right)^\psi = G^{\varphi\psi} \in \mathfrak{X} \Rightarrow H \in \mathfrak{X} \Rightarrow H \leq G^\psi \Rightarrow H^\varphi \leq G^{\psi\varphi}$, $G^{\varphi\psi} \leq G^{\psi\varphi}$

(2) Ist $\mathcal{E}$ eine nach unten abg. Menge einfacher Gruppen und $\mathfrak{X} := \{X \mid$ kein Kopf von X ist $\in \mathcal{E}\}$, so $\mathfrak{X}$ erzeug. abg. u. die Bed. (1) II_{ab} gilt, und es ist $G_{\mathfrak{X}} = G^{\mathcal{E}}$, wo $\mathcal{E}$ = unterer Abschluß von $\mathcal{E}$

s. auch 174.2

176/177

noch Ugr-Funktoren

(1) Sind $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2$ beliebige Klassen, so gilt: $(\forall_G \; G_{\mathfrak{X}_1} = G_{\mathfrak{X}_2}) \Leftrightarrow \{\mathrm{Erz}\,\mathfrak{X}_1\} = \{\mathrm{Erz}\,\mathfrak{X}_2\}$

Satz 2 Sei Ψ ein stabiler, mit Homom. vertauschbarer Funktor. Dann $\exists\,\mathcal{E}$, n. unten abgeschlossen, so dass $G^\varphi = G^{\mathcal{E}}$ (und umgekehrt)
Bew: $\mathcal{E} := \{E \mid E \text{ einfach}, E^\varphi = 1\}$.

Satz 3 Sei $A \leq G \leq \mathrm{Sym}\,\Omega$, jedes G_α sei ein hom. Bild von A. Sei $\mathcal{E}$ n. u. abg., $\Delta := \Omega_{A^{\mathcal{E}}}$. Dann ist Δ ein Block von G, und $\mathcal{N}_G(A^{\mathcal{E}}) = \{g \in G \mid \Delta \cap \Delta^g \neq \emptyset\}$.
Bew 175.5

177/178

15.12.76

Satz 1 G pri Ω, $\Delta^{G_\alpha} = \Delta \subseteq \Omega - \alpha$, $\Gamma \subseteq \Delta$, $\alpha \in (\alpha \cup \Gamma)^t \Rightarrow \mathcal{E}(G_{\alpha\Gamma}) = \mathcal{E}(G_{\alpha\Gamma}^{t\Delta}) =: \mathcal{E} = \mathcal{E}(G_{\alpha\Gamma}^{\Delta^s})$ $(\alpha^s \in \Delta)$
Bew: $G_{\alpha\Gamma}^{t\mathcal{E}} \leq G_{\alpha\Delta} \leq (G_{\alpha\Gamma})^{\mathfrak{G}_\alpha}$ $G_{\alpha\Gamma}^{t\mathcal{E}} = G_{\alpha\Gamma}^{\mathcal{E} g_\alpha}$
$\forall h \in G_\alpha$: $(\mathcal{E}_\Delta^t)^\Gamma = (\mathcal{E}_\Delta^{th})^\Gamma$ da $\Gamma^h = \Gamma$, also $G_{\alpha\Gamma}^{th\mathcal{E}} = G_{\alpha\Gamma}^{\mathcal{E}}$, $\langle th \mid h \in G_\alpha\rangle = G \leq \mathcal{N} G_\Delta^{\mathcal{E}}$.
Sonderfall Jordan steckt im folgenden allgemeinen Satz:

<u>Satz 1*</u> G pri Ω, $\alpha \in \Omega$, $\alpha^t = \delta \in \Delta = \Delta^{G_\alpha} \subseteq \Omega$, $G_{\alpha\Delta} \leq H \leq G_\delta$, H_0 schwach G-abgeschlossen in H, $H_0^{\Delta^t} = 1 \Rightarrow H_0 = 1$.
Bew: $H_0^{t^-} \leq G_{\alpha\Delta} \leq H$, $G_\alpha t \subseteq \mathcal{N}(H_0)$. Bei Jordan: $H = G_{\alpha\Delta}$, $H_0 = H^{\mathcal{E}}$, $\mathcal{E} := \mathcal{E}(G_\alpha^{\Delta^t}) \subseteq \mathcal{E}(G_\alpha)$.

FRAGE Homom. invariante stabile Funktoren auf <u>Permutationsgruppen</u> bestimmen (vgl. 177.2)

178/179

gesamte Seite 179 leer

179/180

Moduln einer p-Gruppe $\mathbb{F}_p$

9.1.77
Im Anschluß an Dipl Arb Friedrich bemerkt:

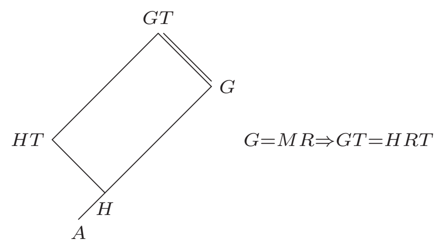
1 Sei $R = \mathbb{F}_p[G]$, $|G| = p^\alpha > 1$, $J = \{\sum c_g g \mid \sum c_g = 0\}$ das Jacobson-Radikal von R.

1 Ist $\mathfrak{m}$ ein R-Modul und $\Phi\mathfrak{m} := \bigcap \mathfrak{u}$, $\mathfrak{u}$ maximaler Teilmodul von $\mathfrak{m}$ [also $\frac{|\mathfrak{m}|}{|\mathfrak{u}|} = p$], so $\Phi\mathfrak{m} = \mathfrak{m}J$.

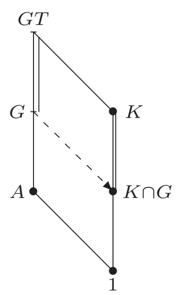
2 Jeder Vektorraum zwischen $\mathfrak{m}$ und $\Phi\mathfrak{m}$ ist ein R-Modul.

3 Sei $\mathfrak{u} < \mathfrak{m}$, jeder maximale Vektorraum zwischen $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{m}$ sei R-Modul. Dann ist $\Phi\mathfrak{m} \leq \mathfrak{u}$.

Anderer Beweis von 181(1)
$A \lhd GT$



Nach Gaschütz $\exists\, K$:



Gaschütz für Gruppen mit Operator<u>gruppe</u> T

1. Sei $A \trianglelefteq G$, $A' = 1$, $A \leq H_\nu \underset{i_\nu}{\leq} G$ $(\nu = 1, \ldots, n)$. Gruppe T operiere auf G sodaß $A^T = A$, $H_\nu^T = H_\nu$. Sei $i := \mathrm{ggT}(i_1, \ldots)$, $(a \mapsto a^i) \in \mathrm{Aut}\, A$. (*) Es gebe $C_\nu = C_\nu^T \in \mathrm{Kpl}(A, H_\nu)$. Dann $\exists C \in \mathrm{Kpl}(A, G)$ so dass die Konjugiertenklasse von C in G bei T fest bleibt: $C^t \underset{G}{=} C\,\forall t \in T$.

   [= unter A] nämlich $C = \mathrm{Stab}_{R^-}$ für jedes $R = (R_1, \ldots, R_n)$.

   Anderer Beweis links [Verweispfeil auf S. 180]
   Bew: Ist $A \leq H \leq G$, $C = C^T \in \mathrm{Kpl}(A, H)$, so gilt für $H_\nu r = H_\nu s$: $Hr^t = Hs^t$ und $\frac{r^t}{s^t} = s^{-t}(s^t r^{-t})^\varphi r^t$ wobei $c := h_\nu^\varphi = C_\nu$-Teil von h^φ: $h = ac \Rightarrow h^t = a^t c^t$, also ist $(h^t)^\varphi = (h^\varphi)^t$ und somit $\frac{r^t}{s^t} = (s^-(sr^-)^\varphi r)^t = \left(\frac{r}{s}\right)^t$.

   Daher folgt aus $R \sim S$ auch $R^t \sim S^t$, also wirkt T auf Ω, und es ist $(wg)^t = w^t g^t$.

   Die von T induzierte PGr auf Ω permutiert also die Stabilisatoren G_α nur untereinander, $(G_0)^t = G_{\alpha^t} = G_\alpha^a \exists a \in A$.

2. FRAGE: Genügt statt Vor * eine schwächere:

$$\{C_\nu^a \mid a \in A\} \text{ sei } T\text{-invariant ?}$$

   Ja: Wenn $\begin{cases} B^t = B^a, \text{ so} \\ C = \text{ Stab } R^\sim \end{cases} \qquad C^t = \mathrm{Stab}(aR^t)^\sim \underset{A}{=} C.$

Gaschütz (1) Zu S.134: Es kann nicht allgemein $C \cap H_\nu \underset{H_\nu}{=} C_\nu$ gelten. Denn man kann $H_1 = H_2$ wählen, aber $C_1 \neq C_2$, z.B. $C_2 = a^- C_1 a$. (Anderer Beweis: 136_1)

folgender Unterpunkt durchgestrichen

(2) *Randbemerkung:* [besser: 134 (2)]

Ersetzt man im Satz von Gaschütz 134.1
jedes C_ν durch $C_\nu^* := C_\nu^{t_{\nu 0} c_\nu^{a_\nu}}$, $t_\nu \in G_\nu$,
also H_ν 〃 $H_\nu^* := H_\nu^{t_\nu}$, so wird $C^* \underset{G}{=} C$.
Bew: Sei R_ν Vertr.Syst. zu $AC_\nu := H_\nu$, $R_\nu^* := R^{t_\nu}$ zu H_ν^*; Dann ist $\left(\frac{R_\nu^{t_\nu}}{S_\nu^{t_\nu}}\right)_* = \left(\frac{R_\nu}{S_\nu}\right)^{t_\nu} = \frac{R_\nu t_\nu}{S_\nu t_\nu}$ (nach 129.4)

$= \prod (A \cap s^{-t_\nu} C_\nu^{t_\nu} r^{t_\nu}) = \prod (A \cap s^- C_\nu r)^{t_\nu}$.

NB: $H_\nu^{t_\nu} s^{t_\nu} = H_\nu^{t_\nu} r^{t_\nu} \Leftrightarrow H_\nu s = H_\nu r$.

Also $x \in G_{R^*}^* \Leftrightarrow 1 = \left(\frac{R^* x}{R^*}\right)_* = \prod_\nu \left(\frac{R_\nu^* x}{R_\nu^*}\right)_*^{j_\nu}$ und mit $x = x_\nu^{t_\nu}$

$$= \prod \left[\frac{(R_\nu x_\nu)^{t_\nu}}{R_\nu^{t_\nu}}\right]_*^{j_\nu} = \prod_\nu \left(\frac{R_\nu x_\nu t_\nu}{R_\nu t_\nu}\right)^{j_\nu} = \prod \left[\frac{R_\nu t_\nu x}{R_\nu t_\nu}\right]^{j_\nu}$$

$$\Leftrightarrow x \in G_{(R_1 t_1, \ldots, G_n t_n)},\ G_{(R_1^*, \ldots)} \underset{G}{=} G_{(R_1 t_1, \ldots)}$$

ausführlich $G_{(R_\nu^{t_\nu})} = G_{(R_\nu t_\nu)} \underset{G}{=} G_{(R_\nu)}$

FRAGE (3) Kann man aus S.137 einen Satz von Gaschütz für nichtabelsche Normalteiler erhalten?

Aufgabe: Unter einen Hut bringen mit Operatorgruppen!

182/183

Seite 183 leer

183/184

Subnormalisator

11.5.77

(1) Hilfssatz: $A \leq G$, $S \operatorname{sn} G$, $G = AS^G \Rightarrow G = \langle A, S\rangle$.
Bew: $S^G = S^{(AS^G)} = (S^A)^{S^G}$ mit $(S^A) \operatorname{sn} S^G$, $S^G = S^A$, $G = AS^A = \langle A, S\rangle$

Unterpunkt durchgestrichen

---

(2) <u>Satz</u>:
$|G| < \infty$; $A \leq G$, $S, T \operatorname{sn} G$, $A \operatorname{sn}\langle A, S\rangle$; $A \operatorname{sn}\langle A, T\rangle \Rightarrow A \operatorname{sn}\langle A, S, T\rangle$
<u>Allgemeiner</u> u. mit einfacherem Beweis: 197(6).
Bew: Ann Gegenb. (G, A, S, T) mit $|G|$ min, $|A|$ min, $|S| + |T|$ max. Dann

- (a) Alles folgende gilt auch mit Vertauschung von S mit T.
- (b) $G = \langle A, S, T\rangle$, sonst $(\langle A, S, T\rangle, A, S, T)$.
- (b′) $1 < N \trianglelefteq G \Rightarrow AN \operatorname{sn} G$
- (c) $S = S^A$, $T = T^A$, sonst (G, A, S^A, T^A)
- (d) $AS^G < G$, sonst (1): $A \operatorname{sn}\langle A, S\rangle = G$
- (e) $S^G \cap T \leq S$, sonst: $(AS^G, A, S, S^G \cap T)$ gibt $A \operatorname{sn}\langle S, S^G \cap T\rangle = \overline{S}$, $(G, A, \overline{S}, T)$ Wid.
- (f) $S^G \cap T = S \cap T$, denn c) $\leq S \cap T \leq S^G \cap T$
- (g) $S \cap T \trianglelefteq S$, $\trianglelefteq T$ f)
- (h) $S \cap T = 1$ b′ [$N := S \cap T > 1 \Rightarrow (G/N, AN/N, S/N)$ gibt $AN \operatorname{sn} G$, aber $A \operatorname{sn} AN \leq$ **???**

184/185

(i) $A_{\cdot\cdot G} \leqq S$, $(G, A, /A_{\cdot\cdot G}S, T)$, $A_{\cdot\cdot G}S \leq S$

(j) $A_{\cdot\cdot G} = 1 \quad$ (a,h)

(k) A einfach, $A_1 \lhd A \Rightarrow (G, A_1, S, T)$ kein Gegb., $A_1 \operatorname{sn}\langle A_1, S, T\rangle \trianglelefteq \langle A, S, T\rangle = G$

(l) $A \not\leq S$, sonst $A \operatorname{sn}\langle A, S\rangle = S \operatorname{sn} G$

(m) $|A| =: p \in \mathbb{P}$, sonst $[A, S] = 1 = [A, T]$, $A \trianglelefteq G$

(n) $\exists S_1$ einfach, $S_1 \operatorname{sn} S$, sonst $S_1 = 1$, $A \operatorname{sn}\langle A, T\rangle = \langle AST\rangle = G$

(o) $N = \mathcal{N}_G(A) \Rightarrow T = T^A$, sonst (G, A, S, T^A)

(p) $|S_1| = p$, sonst $[A, S_1] = 1$, $S_1 \leq \mathcal{N}(A) \leq \mathcal{N}(T)$ (p), denn $A \operatorname{sn} A^T = A^{(AS_1)T} = A^{\langle A,S,T\rangle}$, $A \operatorname{sn}\langle A, S_1T\rangle$, $S_1 \leq T$, Wid. (h)

(q) $P := O_p(G) \neq 1 \quad$ (p)

(r) $A \cdot P \operatorname{sn} G \quad$ (b′) $[(G/P, AP/P, SP/P, TP/P)]$

(s) $A \leq P$, $|AP|$ teilt $|A| \cdot |P| = p^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}$, (r)

(t) $A \operatorname{sn} G$, da P p-Gruppe, (s)

(3) <u>SATZ</u>: $|G| < \infty$, $A \trianglelefteq B \leq G$, $A \operatorname{sn}\langle S, A\rangle$, $S \operatorname{sn} G \Rightarrow A \operatorname{sn}\langle B, S\rangle$
Bew: $A \operatorname{sn}\langle A, S^b\rangle$; $A \operatorname{sn}\langle A, S^B\rangle$ (2)
$A \operatorname{sn}\langle A, S^B\rangle \lhd BS^B = \langle B, S\rangle$

<u>Achtung:</u> Statt $A \trianglelefteq B$ genügt <u>nicht $A \operatorname{sn} B$</u>!

(4) <u>Gegenbeispiel</u>: Sogar aus $A \operatorname{sn} B \leq G$, $[A, S] = 1$, $S \operatorname{sn} G$ folgt nicht $A \operatorname{sn}\langle B, S\rangle$.

$$B := \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle \cong C_2 \wr C_2 \text{ in } \mathrm{GL}(2, p),\ p > 2.$$

$$A := \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle \leq B.$$

$G = P \rtimes B$ semidirekt, wo $P = \{(xy) \mid x, y \in F_p\}_+$. Dann $A \operatorname{sn} B$, da $|B| = 8$, $S := \langle (1, 0)\rangle$, $|S| = p$, $S \lhd P \lhd G$. A zentralisiert S, also $A \lhd AS$, aber $A \notin \operatorname{sn} G$, da A nicht $\langle (0, 1)\rangle = T$ zentralisiert, obwohl $T \operatorname{sn} G$, $(|A|, |T|) = 1$.

$$a = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix},\ X \leq \mathrm{Z}(B)$$

B abelsch, B sn $\langle A, B\rangle$

Satz (6) $A \in \mathcal{U}_p(G),\ A \operatorname{sn} H \leq G \Rightarrow A \operatorname{sn}\langle H, O_p(G)\rangle$.
Bew: $A \operatorname{sn} AO_p(G) \operatorname{sn} HO_p(G)$.

allg. ebenso:

(6′) $A \in \mathcal{U}_p(G),\ B \in \mathcal{U}_p(G),\ A \operatorname{sn} H,\ H \leq \mathcal{N}(B) \Rightarrow A \operatorname{sn}\langle H, B\rangle$.

Satz 7 $A \operatorname{sn} B \leq G,\ N \trianglelefteq G,\ A \operatorname{sn}\langle A, N\rangle \Rightarrow A \operatorname{sn} BN$. *Beweis im folgenden durchgestrichen*

Bew: *ausgestrichen:* [$\bmod N$ ist $bn(\circ a)^k \equiv b(\circ a)^k \in A$, also $bn(\circ a)^{k+l} \in AN$] $\overline{G} := G/N$, $\overline{A} \operatorname{sn} \overline{B}$, $A \operatorname{sn} AN \operatorname{sn} BN$. Forts: 201

186/187

Subnormalisator

1. Satz: Für jedes Paar $\{A, G\}$, $A \leq G \in \mathfrak{F} = \{\text{endl. Gr}\}$ sei der Subnormalisator $S(A, G) \leq G$ definiert derart, dass gilt:

✓ I $S(A, G) = G \Rightarrow A \operatorname{sn} G$

✓ II $A \leq G \geq G_1 \Rightarrow G_1 \cap S(A, G) \subseteq S(A \cap G_1, G_1)$

✓ III $\varphi \in \operatorname{Hom} G \Rightarrow S(A, G)^\varphi \subseteq S(A^\varphi, G^\varphi)$

✓ IV $A \leq G,\ |A| \in \mathbb{P},\ G \circ S = S'$ einfach, $S \subseteq S(A, G) \Rightarrow A \operatorname{sn} AS$

✓ V $A_1 \lhd A \Rightarrow S(A, G) \subseteq S(A_1, G)$.

✓ ⊛ Sei (G, A, S) ein Tripel mit minimalem $|G| \cdot |A| \cdot |S|$ mit den Eigenschaften: $A \leq G \in \mathfrak{F}$, $S \operatorname{sn} G$, $S \subseteq S(A, G)$, $A \notin \operatorname{sn}(A, S)$. Dann (1) - (34), insb. $\exists a \in A,\ s \in S$ mit allen $s(*a)^n \notin A$.

NB wohl ähnlich für allgemeine Ketten

✓ (1) $G_1 < G \Rightarrow A \cap G_1 \operatorname{sn}\langle A \cap G_1, S \cap G_1\rangle$ II

✓ (2) $G = \langle A, S\rangle$, (1) $A \not\leq S,\ S \not\leq A$.

✓ (3) $1 < N \trianglelefteq G \Rightarrow AN \operatorname{sn} G$ III $G^\varphi = G/N$.

(4) $A_G = 1$ (3)

✓ (5) $A_0 := A \cap S^G < A$ sonst $A \leq S^G$, $G = AS^G = S^G$, $G = S \subseteq S(A, G)$ I Wid

(6) $\forall_B : A_0 \leq B < A \Rightarrow B \operatorname{sn}\langle B, S\rangle$
Bew: $G_1 := BS^G$, $A \cap G_1 = BA_0 = B < A$, also $G_1 < G$, $S \cap G_1 = S$ (1)

✓ (7) $S^A = S^G < G$, $S^A = S^{\langle S, A\rangle} = S^G$ (2)
Wäre $S^G = G$, so $S = G$ wegen $S \operatorname{sn} G$, $S(A, G) = G$ I

✓ (8) $S_1 \lhd S \Rightarrow A \operatorname{sn}\langle A, S_1\rangle$, $S_1 \operatorname{sn} G$ ⊛

✓ (9) S einköpfig, sonst $A \operatorname{sn}\langle A, S_1, S_2\rangle = G$ $\underline{184(2)}$

Frage 9.79: Ist "$x \in S(A, G) \Rightarrow \langle x\rangle \subseteq (A, G)$" ein vernünftiges Axiom?

NB: ✓ heißt: wird später benutzt
Ziel: (14) $S' < S$

187/188

✓ (10) $S' = S \Rightarrow S$ einfach
Bew: $S_0 := \operatorname{Rumpf} S$, $F := S/S_0$, Skript Selinka.
Mit $X^{[F]} := \bigcap\limits_{\substack{M \lhd X \\ X/M \cong F}} M$ gilt: $X = \langle X_i \rangle$, $X_i \operatorname{sn} G \Rightarrow X^{[F]} = \langle X_i^F \rangle$.
Danach $S^{G[F]} = \left(S^A\right)^{[F]} = \langle S^{a[F]}; a \in A \rangle = \langle S^{[F]a} \mid a \in A \rangle = S_0^A$; wegen $S^{G[F]} \trianglelefteq S^G \trianglelefteq G$ ist also $S_0^A \trianglelefteq G$. $A \operatorname{sn} \langle A, S_0 \rangle$ und nach (3) wäre $S_0 \neq 1$, so auch $\langle A, S_0 \rangle = AS_0^A \operatorname{sn} G$, $A \operatorname{sn} G$.

✓ (11) $S' = S \Rightarrow (A_0 :=) A \cap S^G = 1$.
Bew: $\underline{S = S' \text{ einf. } \operatorname{sn}\langle A_0, S \rangle}$, $A_0 \operatorname{sn} \langle A_0, S \rangle$. (6) mit $B := A_0 \underset{(5)}{<} A$, $A, S \leq \mathcal{N}(A_0)$, $A_0 \trianglelefteq \langle A, S \rangle = G$, $A_0 \leq A_G = 1$.

✓ (12) $S' = S \Rightarrow |A| =: r \in \mathbb{P}$. Sonst $\exists B < A$, $|B| = r \in \mathbb{P}$. Für jedes solche B: Sei $A_0 = 1 \leq B < A$, also nach (6): $B \operatorname{sn} \langle B, S \rangle$, $[B, S] = 1$, $S = S' \operatorname{sn} \langle B, S \rangle$; $[B^a, S] = 1$, $[B^A, S] = 1$ da $B^A \leq A_G = 1$.

188/189

✓ (13) $S' = S \Rightarrow S \trianglelefteq G$, sonst $\mathcal{N}_A(S) < A$, $\mathcal{N}_A(S) = 1$ wegen $|A| = r \in \mathbb{P}$, also sind alle S^a verschieden:

$$S^G = S^A = \bigtimes_{a \in A} S^a$$

Wegen $|S| \neq r^{\cdot\cdot}$ gibt es $Q \leq S$, $|Q| = q \in \mathbb{P}$, $q \neq r$. Dann ist Q^A eine abelsche q-Gruppe, da $= \bigtimes\limits_{a \in A} Q^a$. $G_1 := \langle A, Q \rangle < G$, da $= A \cdot Q^A$ auflösbar, $S' = S$. $A \operatorname{sn} G_1$, da $Q \subseteq S \cap G_1 \subseteq S(A, G_1)$ II und $G_1 < G$. $Q \lhd Q^A \lhd \langle A, Q \rangle = G_1$. Wegen $(|A|, |Q|) = 1$ ist $[A, Q] = 1$. $\exists a \neq 1$. Dann wird $Q^a = Q \leq S^a \cap S = 1$ wegen $S \neq S^a$ einf. $\lhd\lhd G$. Wid.

✓ (14) $S' < S$. Sonst (12), (13), (10), IV Wid

✓ (15) $|S| = q^\beta$, $q \in \mathbb{P}$, S zyklisch.
Bew:

a) $\exists q \mid |S : S'|$ nach (14), $S^{[q]} := \bigcap\limits_{\substack{N \lhd S \\ q^{\cdot\cdot}}} N < S$,
$(S^{[q]})^A = \langle S^{[q]a} \mid a \in A \rangle = \langle S^{a[q]} \mid a \in A \rangle =$ **???**$\langle S^a \mid a \in A \rangle^{[q]} = (S^A)^{[q]} \underset{7}{=} S^{G[q]} \trianglelefteq G$.
Wäre $S^{[q]A} \neq 1$, so (3): $AS^{[q]A} \operatorname{sn} G$. Aber (8): $A \operatorname{sn} \langle A, S^{[q]} \rangle = \langle A, S^{[q]A} \rangle = AS^{[q]A}$. Also $A \operatorname{sn} G$, Wid. Daher $S^{[q]} \leq S^{[q]A} = 1$, $|S| = q^\beta$.

b) Nach 9 ist S einköpfig.
NB: Wahrsch. $|S| = q$!

189/190

Jetzt untersuchen wir A:

✓ (16) $A_1 \lhd A \Rightarrow A_1 \operatorname{sn} G$. Bew: $A_1 \operatorname{sn}\langle A_1, S\rangle$ V ⊛ $A_1 \trianglelefteq A$, $S \operatorname{sn} G$. 185(3): $A_1 \operatorname{sn}\langle A, S\rangle = G$.

(17) A einköpfig, sonst $A = \langle A_1, A_2\rangle \operatorname{sn} G$ (16).

✓ (18) Aus $A_0 \leq B < A$ folgt $B^{[q]} = 1$.
Bew: (6): $B \operatorname{sn}\langle B, S\rangle$. Da $S^{[q]} = 1$, ist $S \leq \mathcal{N} B^{[q]}$. Ebenso für alle $a \in A$: $S \leq \mathcal{N}(B^{a[q]}) = \mathcal{N} B^{[q]a}$, $S \leq \mathcal{N}(B^{[q]})^A$, $B^{[q]A} \trianglelefteq G$, $B^{[q]A} \leq A_G = 1$ (4)

(19) $A_0^{[q]} = 1$ (18)

(20) $A^{[q]} = A$, sonst $A^{[q]} \lhd A$, daher nach (5): $A^{[q]} \operatorname{sn}\langle A^{[q]}, S\rangle$ wegen $A^{[q]} = \langle A^{[q]}, S^{[q]}\rangle = \langle A^{[q]}, S\rangle^{[q]} \lhd \langle A^{[q]}, S\rangle$ ist $S \leq \mathcal{N} A^{[q]}$, $A \leq \dots$, $A^{[q]} \trianglelefteq G$, $A^{[q]} \leq A_G \overset{4}{=} 1$. A q-Gr, $S \operatorname{sn} G q$-Gr, $G = AS^A$ q-Gr, $A \operatorname{sn} G$, Wid.
190/191

✓ (21) $|A : A_0| =: p \in \mathbb{P}$, $p \neq q$
Bew: $|A : A_0| \neq q^{\cdot^{\cdot}}$, sonst $A^{[q]} = 1$, Wid. (20)
$\exists p \in \mathbb{P}$, $p \neq q$, $p \mid |A : A_0|$ z.B.: $A_0 \underset{p}{<} B \leq A$. Wäre $B < A$, so $B^{[q]} = 1$ (18), also $B = A$.
Weiter sei P eine p-Sylowgruppe von A. $Q := A_0 S^G$, Z ein min. Normalteiler von G in Q.

✓ (22) $A = A_0 P$, $|A_0| = q^{\cdot^{\cdot}}$, $|P| = p$ (21)

(23) $Q := S^G$, $G = QP$, $|Q| = q^{\cdot^{\cdot}}$, $Q \underset{p}{\lhd} G$
Bew: $S \operatorname{sn} G$ q-Gr, also Q q-Gr
q-Syl $G = \{Q\}$, $Q \geq A_0$

✓ (24) $Z \leq Q$, $Z \cdot\!\lhd \Rightarrow Z$ elem. abelsch, $Z \leq \operatorname{Ztr} Q$, $PA_0Z = AZ = A^G = P^G \trianglelefteq G$.
Bew: $[Z, Q] \trianglelefteq G$, $< Q$, $= 1$.
(3): $AZ \operatorname{sn} G$; $[G : AZ] = q^{\cdot^{\cdot}}$ wegen $G = AQ$, also $G^{[q]} \leq AZ$, $A = \langle p\text{-Syl } A\rangle \leq P^G = G^{[q]} \leq AZ$, $P^G = A(Z \cap P^G) \neq A$ (sonst $A \trianglelefteq G$), also $Z \cap P^G \neq 1$, $Z \leq P^G$ wegen Z min NT G

$\dfrac{AZ \leq P^G \leq AZ}{\to P^G = AZ}$ $\quad$ $\dfrac{A^G \leq P^G \leq A^G}{\to P^G = A^G}$

191/192

✓ (25) $G = AZS = PA_0ZS$, da $G = A^G S = AZS$

✓ (26) $A_0 Z \trianglelefteq G$. Bew: $A_0 Z \underset{p}{\lhd} AZ = A^G \trianglelefteq G$, $A_0 Z = (AZ)^{[p]}$

(27) $(S^G =) Q = A_0 ZS = G^{[p]}$, denn $A_0 Z$ normale q-Gr.
(25): $A_0 ZS \operatorname{sn} q$-Gr vom Index p, $A_0 ZS = G^{[p]} \geq Q$ und $|G : Q| = p$.

(28) $A_0 Z$ elementar abelsch
Bew: $A_0 Z \trianglelefteq G$ (26); q-Gr., $A_0' = (A_0 Z)' \trianglelefteq G$, $A_0' \leq A_G = 1$. $A_0 Z$ abelsch; für $X^{(p)} := \langle x^p \mid x \in X\rangle$ ist ebenso $(A_0 Z)^{(p)} = 1$.

(28a) Z ist P-irreduzibel, daher $Z \cap A_0 = 1$. 26, 28; Z ist der einzige min. NT von G, sonst $A_0 \cap \operatorname{Ztr} Q > 1$.

✓ (29) $C_{A_0 Z}(P) = 1$
Bew: $=: C$

$$\begin{aligned} C &= A_0 Z \cap \operatorname{Ztr} AZ \\ &= A_0 Z \cap \operatorname{Ztr} A^G \quad (24) \\ &\trianglelefteq G \quad (26) \end{aligned}$$

$[C, A] = 1$; $A \trianglelefteq A^C$. Wäre $C \neq 1$, so (3): $A \triangleleft AC \operatorname{sn} G$, Wid.

(30) [von S. 193]
Aus $y \in A_0 Z$ und $a^y \in A$ (wo $\langle a \rangle = P$) folgt $y \in A_0$.
Bew:

$$\begin{aligned} [a, y] = a^- a^y &\in A \cap A_0 Z \quad (26) \\ &= A_0 P \cap A_0 Z = A_0(P \cap A_0 Z) = A_0 \end{aligned}$$

$A_0 a^- y^- ay = A_0$, $(A_0 y^-)^a = A_0 y^-$; $|A_0 y^-| = q^{\cdot\cdot}$, also hat a einen Fixpunkt f in $A_0 y^- \leq A_0 Z$; nach (29) ist $f = 1$, $A_0 y^- = A_0$, $y \in A_0$.

(31) Aus $P \in p\text{-Syl}\, A$, $x \in A^G$ $(= AZ = PA_0 Z)$, $P^x \subseteq A$ folgt $x \in A$.
Bew: $\exists a \in P$, $y \in A_0 Z : x = ay$.

(32) $\mathcal{N}_{AZ}(A) = A$ (31)

192/193

Dann $P^y = P^x \subseteq A$; nach (30) ist $y \in A_0$, $x = ay \in A$.

(33) $S \cap A_0 Z = 1$. Bew: $t \in S \cap A_0 Z \Rightarrow A \triangleleft \langle A, t \rangle$, $t \in \mathcal{N}(A)$ (31): $t \in A$, (25): $t^G = t^{SZA} = t^A \subseteq A_G = 1$.

(34) [von S. 194] Sei $\langle a \rangle = P \in p\text{-Syl}\, A$, $\langle s \rangle = S$. Nicht zu jedem $t \in s^{\{A_0\}}$ gibts Mengen $E_1, \ldots, E_n \subseteq G$, so dass $\langle E_1 \rangle = \langle a, a^t \rangle$, $\langle E_i \rangle = \langle a, a^{E_{i-1}} \rangle$, $E_n \subseteq A$.

Bew: Wenn $E_1, \ldots, E_n$ diese Bedingungen erfüllen, so ist $E_1 \subseteq A$. Das ist klar, wenn $n = 1$. Für $n > 1$ ist $E_1, \ldots, E_{n-1} \leq A^G$, also $E_{n-1}, \ldots E_1 \leq A$ (31).

Ann: $\forall t \in s^{\{A_0\}} \exists E_1, \ldots E_n$. Dann $\forall a_0 \in A_0 : t := a_0^- s a_0 \Rightarrow a^t \in A$. Das gibt $a^{a_0^- s} \in A$, $P^{A_0 s} \leq A$. Aber P^{a_0} durchläuft p-Syl A, nach 20, 22 also $P^{A_0} = A$, somit $A^S \leq A$, $A \triangleleft \langle A, S \rangle G$. Wid.

NB: alle $t = s^{a_0} \in S(A, G)$! Fortsetzung: 261

193/194

14.5.77

(1) Ein sehr großer Subnormalisator $S(A,G)$, für den die Hauptforderungen gelten, ist wohl: $\overline{S}(A,G) := \{g \in G \mid$ Aus $a \in A$ primär , $n \in \mathbb{N} : g = g(*a)^n$ folgt $: \exists E_0, \ldots, E_n \subseteq G : \langle a, g_0 \rangle = E_0,\ \langle a, a^{E_i} \rangle = \langle E_{i+1} \rangle,\ E_n \subseteq A\}$
Aber für diesen gilt nicht: (s. 187-193)

$$A \leq G,\ S \operatorname{sn} G,\ S \subseteq \overline{S}(A,G) \Rightarrow A \operatorname{sn}\langle A, S\rangle$$

(2) Ein Axiom: $A, B \leq G,\ A \subseteq S(B,G),\ B \subseteq S(A,G) \Rightarrow A, B$ kosubnormal

(3) 〃 $s \in S(A,G),\ z \in \mathcal{C}_G(A) \Rightarrow sz, zs \in S(A,G)$

194/195

[*gesamte Seite mit Bleistift durchgestrichen*]

Kosubnormalität (Forts. von 184)

24.5.77 *Randbemerkung:* [Schwab-Gedenksatz †am 10.9.77 197 (5)]

(1) Satz: $A_i \leq G$ endlich ($\leftarrow$ und was ist, wenn $|G| = \infty$?) ($i = 1, \ldots, n$); je zwei seien kosubnormal und miteinander vtb.
Dann ist jede $A_i \operatorname{sn}\langle A_1, A_2, \ldots, A_n\rangle = J$.
Bemerkung: [schärfer für $n = 3$ 197(5)]

Ergänzung: 196(2,3), 197(5)

Bew: $(GA_1A_2 \ldots A_n)$ Gegenbeispiel mit $|J| + \sum |A_i| =: m$ min.

(0) $n \geq 3$; alle $A_i \neq 1$. Etwa $A_1 \notin \operatorname{sn} J$. Sei α ein distributiver Subnormalfunktor.

(1) $A_i \operatorname{ksn} A_k,\ J = \langle A_1 A_n\rangle \Rightarrow N := \langle A_1^\alpha, A_\nu^\alpha, \ldots, A_n^\alpha\rangle \trianglelefteq J$.
Bew: Wegen der Kosubn. ist

$$N = \langle\langle A_1^\alpha, A_2^\alpha\rangle; \langle A_1^\alpha, A_2^\alpha\rangle\rangle = \langle\langle A_1A_2\rangle^\alpha,\ \ldots,\ \langle A_1A_2\rangle^\alpha\rangle$$

$\Rightarrow A_1 \leq \mathcal{N}(N)$, ebenso $A_i \leq \cdots$

$n := 3$

(2) $A_n^\alpha < A_n \Rightarrow A_1^\alpha = A_2^\alpha = \cdots = A_n^\alpha = 1$.
Bew: $A_1, A_2^\alpha, \ldots, A_n^\alpha$ sind ksu, vtb. min: $A_1 \operatorname{sn} A_1N$ wäre $N \neq 1$, so G/N: $A_1N \operatorname{sn} G,\ A_1 \operatorname{sn} G$.

(3) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ haben bis auf Isom nur einen und denselben Kompos.faktor F. (denn etwa $A_n \neq 1$, $\alpha = \{F\}$).

(4) $F' = F$, sonst $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{G}_p$ wegen $A_i p A_k$ ist $G = \mathfrak{G}_p$, $A_1 \operatorname{sn} G$ Wid.

(5) $A_1 A_2 \ldots A_n$ sind direkte Produkte gewisser $F_\lambda \cong F$; desgleichen daher alle $\langle A_1, A_k\rangle$
Bew: $\alpha := [F]$

(6) Wid: Sogar $A_1 \trianglelefteq G$

195/196

Kosubnormalität
24.5.77

(2) In (1) kann die Vor. "A_1 vtb mit A_2, A_3" nicht weggelassen werden:

$$A_2 : \langle (12)(34)(56)\rangle,\ A_1 = \langle (23)\rangle,\ A_3 := \langle (45)\rangle$$

Hier ist sogar noch $[A_1, A_3] = 1$.

[restliche Seite mit Bleistift durchgestrichen]

Satz (3) $A_1, \ldots, A_n$ pw ksn $\Rightarrow$ $A_i \operatorname{sn} A_i N$, $N := \langle A_1^{\mathfrak{N}}, \ldots, A_n^{\mathfrak{N}}\rangle \lhd J$. Bew: (1) auf $\langle A_1, A_2^{\mathfrak{N}}, \ldots\rangle$

FRAGE: (3′) Seien $A_1, \ldots, A_n \leq G$ paarweise kosubnormal, A_1 mit $A_2, \ldots, A_n$ vertauschbar. Ist dann $A_1 \operatorname{sn}\langle A_1, \ldots A_n\rangle$? NEIN: XVI 115(2)

Satz (4) Sei $G = \langle A_0, A_1, \ldots, A_n\rangle$, stets $A_i \operatorname{sn}\langle A_i, A_k\rangle$. Dann $\forall i$: $A_i^{\mathfrak{N}} \operatorname{sn} G$.
Bew $A_i^{\mathfrak{N}} \operatorname{sn}\langle A_0^{\mathfrak{N}} A_1^{\mathfrak{N}} \cdots A_n^{\mathfrak{N}}\rangle \trianglelefteq G$. Anwendung XVI 114

(4′) Vermutung: $\to$ (b) die größte Untergruppe B_0 von A_0, die mit jedem A_k, $1 \leq k \leq n$, vertauschbar ist, ist $B_0 \trianglelefteq\trianglelefteq G$. [Nachträgliche Anmerkung: f]

(c) jeder Subnormalteiler B_0 von A_0 für den
$A_k B_0 = B_0 A_k$ $(k = 1, \ldots, n)$, ist $\operatorname{sn} G$.

NB zu (c): $S = (P_{A_1} P_{A_2} P_{A_3} \cdots P_{A_n})^m A$ für große m (sobald stationär), wo $P_X A = \langle U \mid U \leq A,\ UX = XU\rangle$.

196/197

Kosubnormalität

[Unterpunkt durchgestrichen]

Satz (5) Sei $A_i \operatorname{sn}\langle A_i, A_k\rangle$ $(i, k \in \{1, 2, 3\})$ und A_1 vtb $\langle A_2, A_3\rangle$. Dann $A_1 \operatorname{sn} G := \langle A_1, A_2, A_3\rangle$. Das verschärft 195(1) im Fall $n = 3$. Für $n = 4$ gilt das Entsprechende <u>nicht</u>: 198(2)
Bew: (G, A_1, A_2, A_3) Gegenb., $|G||A_1| \cdots |A_3|$ min

$$N := \langle A_1^{\mathfrak{N}}, A_2^{\mathfrak{N}}, A_3^{\mathfrak{N}}\rangle \trianglelefteq G = \langle A_1, A_2, A_3\rangle.$$

$A_1, A_2^{\mathfrak{N}}, A_3^{\mathfrak{N}}$ erfüllen Vor. 195(1), also $A_1 \operatorname{sn}\langle A_1 A_2^{\mathfrak{N}} A_3^{\mathfrak{N}}\rangle = A_1 N$.

Wenn $N \neq 1$, so $|G/N| < |G|$: $A_1 N \operatorname{sn} G$ Wid.

Wenn $N = 1$, so alle $A_k \in \mathfrak{N}$, $\langle A_i, A_k\rangle \in \mathfrak{N}$; $\exists p \in \mathbb{P} : p(A) \notin \operatorname{sn} J$. $[p(A_1), (A_i)] = 1$, $i = 1, 2, 3$, wo $p(X) = p$, $[p(A_1), Q] = 1$, $Q := \langle p(A_1),\ p'(A_2),\ p'(A_3)\rangle \lhd J$ 195_2. $p(A_1) \lhd p(A_1)Q \lhd AQ$ (sn J außer wenn $Q = 1$) $\Rightarrow Q = 1$, also $A_1, A_2, A_3 \in \mathfrak{G}_p$, $J = A_1 \cdot \langle A_2, A_3\rangle \in \mathfrak{G}_p$ Wid.

(6) $A \leq G$, $A \operatorname{sn}\langle A, S\rangle$, $A \operatorname{sn}\langle A, T\rangle$, $S, T \operatorname{sn} G \Rightarrow A \operatorname{sn}\langle A, S, T\rangle$
$= 184(2)$

Bew (5) auf A, S^A, T^A anwenden

197/198

[gesamte Seite durchgestrichen]

Kosubnormalität

(1) $\forall p \in \mathbb{P}$: Aus $A, B, C \leq G = \langle A, B, C\rangle$, $|A| = |B| = |C| = p$ und je zwei kosubnormal folgt nicht $A \operatorname{sn} G$. Beispiel für $p = 3$:

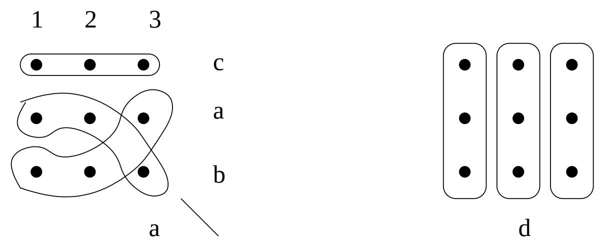
$$a = (123)(456)(789)$$
$$b = (147)$$
$$c = (259)$$

gibt $b^a = (258)$, $\langle b^a, c\rangle \notin \mathfrak{G}_p$.

(2) $\forall p \geq 3$: Aus $A, B, C, D \leq G$, $|A| = \cdots = |D| = p$, alle Paare kosubnormal und A vtb $\langle BCD\rangle$ folgt nicht $A \operatorname{sn}\langle A, B, C, D\rangle$. Bsp:

$$\begin{aligned} a &= (1\ 2\ \cdots\ p) \\ b &= (p+1\ p+2\ \cdots\ 2p-1\ 3p) \\ c &= (2p+1\ 2p+2\ \cdots\ 3p-1\ 2p) \\ d &= (1\ p+1\ 2p+1\ \cdots\ (p-1)p+1)\cdot \\ &\quad (2\ p+2\ 2p+2\ \cdots (p-1)p+2)\cdot \\ &\quad (p\ 2p\ 3p\ \cdots p^2) \end{aligned}$$

etwa $p = 3$ illustriert:



b und c mit ihren Konj unter D erzeugen als Dreierzyklen eine tra Gr, also pri, also A_9; folglich $A \leq \langle B, C, D\rangle$, erst recht $A \,\mathrm{vtb}\langle BCD\rangle$, aber $\langle B, C, D\rangle$ einfach.

198/199

gesamte Seite durchgestrichen

29.5.77

(3) Für $p = 2$ finde ich Ähnliches bisher nur mit $|A| = |B| = |C| = 2$, $|D| = 4$:

(4) Also: Für jedes $p \in \mathbb{P}$ gibts ein Gegenbeispiel zu der Vemutung:
$A, B, C, D \in \mathfrak{G}_p$; $A, B, C, D \leq G$; je zwei kosubnormal;
$A \,\mathrm{vtb}\langle BCD\rangle \Rightarrow A \,\mathrm{sn}\langle ABCD\rangle$
od sogar $\leq$

FRAGE (5) $A_i \leq G_i$, A_i, A_k kosubnormal. $A_1 \,\mathrm{vtb}\, B_l := \langle A_j \mid j \neq 1, l\rangle$ für alle $l > 1$
$\overset{?}{\Rightarrow} A_1 \,\mathrm{sn}\langle A_1, A_2, \ldots, A_l\rangle$? Das wäre eine Verschärfung von 196(3′)

(6) Wie (3) zeigt man: sind $A_1, \ldots, A_n$ p-Gruppen in G und je 100 von ihnen kosubnormal, so folgt nicht $A_1 \,\mathrm{sn}\langle A_i\rangle$.
Bew: Man kann $p > 100$ und alle $|A_i| = p$ wählen.

199/200

Kosubnormalität

7.6.77

(1) (a) $\{A_i \mid i \in I\} \,\mathrm{csn}\, G$, dh $A_i \,\mathrm{sn}\langle A_j\rangle \leq G$, $\{B_j \mid j \in J\} \,\mathrm{csn}\, G \Rightarrow \{A_i \cap B_j \mid i \in I, j \in J\} \,\mathrm{csn}\, G$

(b) $\{A_i\}$ csn, $H \leq G \Rightarrow \{A_i \cap H\}$ csn

(c) 〃 $\varphi \in \operatorname{Hom}\langle A_i\rangle \Rightarrow A_i^\varphi$ csn

(d) 〃 $B_i \operatorname{sn} A_i \Rightarrow \{B_i\}$ csn

[folgender Satz durchgestrichen]

Satz (2) $\{A_i\} \operatorname{csn} G$, $\{B_j\} \operatorname{csn} G$, $\{A_i, B_j\}$ csn, $\langle A_i\rangle \wp \langle B_j\rangle \Rightarrow \{A_i\} \cup \{B_j\}$ csn.
Verallgemeinerung: XVI 40

d.h.: 2′ [von S. 201 übernommen] Sei $A \wp B$; $A_i \operatorname{sn} A = \langle A_i\rangle$; $B_k \operatorname{sn} B = \langle B_k\rangle$. Dann $A \operatorname{csn} B \Leftrightarrow A_i \operatorname{csn} B_k$.

FRAGE (3) $A \operatorname{csn} B, C$; $B \operatorname{csn} C^a$ (oder $B \operatorname{vtb} C^a$) $\forall a \in A \overset{?}{\Rightarrow} A \operatorname{sn}\langle A, B, C\rangle$
b) genügt $B^A \wp C^A$, s.u.

Bew 3b: (XVI 40): $A \in \operatorname{sn} AB^A \cap \operatorname{sn} AC^A$. $AB^A \wp AC^A \underset{XVI}{\Rightarrow} A \operatorname{sn} AB^A C^A$.

Aufgabe (4) Kriterium für Kosubnormalität, z.B. lokales

Falsch ist die Vermutung

(5) Sei $A\,[\leq]\,G$. Wenn die Kosubnormalität auf der Konjugiertenklasse $\{A^g \mid g \in G\}$ transitiv ist, so ist $A \operatorname{sn} G$.

Gegenb: I 80: Dann würde aus $A \lessdot G$ stets $A \operatorname{sn} G$, also $A \lhd G$ folgen.

200/201

(6) FRAGE Zusammenhang mit Knapps Archiv 25, 473?

Forts. von 186 $P \in \mathfrak{G}_p$, $P \leq G$, M max mit $P \operatorname{sn} M \leq G \Rightarrow O_p(G) \leq M$.
m.a.W: $P \in U_p(G)$, $P \operatorname{sn} H \Rightarrow P \operatorname{sn}\langle H, O_p G\rangle$.
Bew: Klar: $P \operatorname{sn} [P \cdot O_p(G)] \operatorname{sn} HO_p(G)$.

FORTS.: XVI 39, 107

201/202

$p^\alpha q^\beta$

14.7.77

1. In einer p-auflösbaren Gruppe hat das Erzeugnis aller p-Sylow-Zentren (die p-Länge und) abelsche p-Sylowgruppen. (Der schwache Abschluß eines p-Sylowzentrums in einer Sylowgr. ist abelsch (wird im Wesentlichen bei Hall-Higman stehen)).

2. $|G| = p^\alpha q^\beta$, $G \in \mathfrak{S} \Rightarrow$ Ist $\begin{cases} X \leq Z(P) & P \in p\text{-Syl } S \\ Y \leq Z(Q) & Q \in g\text{-Syl } G \end{cases}$, so hat $\langle X, Y\rangle$ abelsche Sylowgruppen.

3. In jeder Gruppe G sind p-Sylowgr. von Normalteilern schwach (sogar stark) abgeschlossen. Ist G p-auflösbar und ist A eine schwach abgeschl. p-Untergr. von G, die von Elementen mit $\underline{G\text{-Klassenlänge} \not\equiv 0 \mod p}$ erzeugt wird, Sylowgruppe von A^G und daher stark abgeschl. [In p-aufl. Gr. ist also manchmal für p-Untergr. schwache Abgeschlossenheit gleichwertig mit starker.]

3′ Entsprechendes dürfte in π-aufl. G gelten für π-Untergr., die von Elementen π-freier G-Länge erzeugt werden.

202/203

noch $p^\alpha q^\beta$

1 Ist $|G| < \infty$, $K, L \trianglelefteq G^{*)}$, $A \in \pi-\text{Hall}\, K$, $B \in \pi'-\text{Hall}\, L$, so ist $AB = BA$.
Bew: OBdA $G = \langle A, B\rangle$. $D := K \cap L \trianglelefteq G$. Dann $A \cap D \in \pi - \text{Hall} D$, $B \cap D \in \pi' - \text{Hall}\ D$, also $D = (A \cap D)(B \cap D)$. Nun wird $[A, B] \le D$, mod D $[A, B] = 1$, also ist $\langle A, B\rangle D = ADB = A(A \cap D)(B \cap D)B = AB$.
$^{*)}$ Es genügt nicht: $K, L \lhd\lhd G$, $KL = LK$ (sonst $A \in H_\pi(G)$, $L \lhd\lhd G \Rightarrow AL = LA$)

2 $G \in \mathfrak{G}_{p,q}$ (d.h. $|G| = p^\alpha q^\beta$) $\Rightarrow$ jede schwach abg., von Elementen p-freier G-Länge erzeugte p-Gruppe ist vertauschbar mit jeder ebensolchen q-Gruppe. (203 (3))

4 Sei G minimal nicht auflösbar, $G = PQ$, $X = Z(P)$, $Y = Z(Q)$. Besitzt G eine maximale Untergruppe mit $O_p \ne 1 \ne O_q$, so ist $XY < G$, und $\exists \overline{X}, \overline{Y} : X \le \overline{X} \le P$, $Y \le \overline{Y} \le Q : \langle X, Y\rangle = \overline{XY}$; $\overline{X}, \overline{Y}$ abelsch; nämlich $\overline{X} := P \cap \langle X, Y\rangle$.

5 Es gibt G mit $|G| = 9 \cdot 16$ mit Sockel der Ord 9. Bew: $16 \mid |\mathrm{GL}(2, 3)| = (3^2 - 1)(3^2 - 3)$
s. Glaubermann Burnsides other …

FORTS: 265

203/204

PGr: Lange Bahnen u. Kosubnormalität

17.9.77

1 G tra, $A \operatorname{sn} G$, $l(A) = 1$, $\operatorname{Grad} A > \frac{1}{2} \operatorname{Gr} G \Rightarrow A$ tra.
Denn $\operatorname{Grad} A \mid \operatorname{Grad} G$. Ähnlich für A mit mehreren Bahnen, von denen eine länger als $\frac{1}{2} \operatorname{Gr} G$ ist.

2 A, B kosubn, $l(A) = l(B) = 1$, $\operatorname{Tr} A \cap \operatorname{Tr} B \ne \emptyset \Rightarrow \operatorname{Tr} A \supseteq \operatorname{Tr} B$ oder umg.

3 $A \operatorname{sn} G$, A unzerschneidbar in $G^{(2)}$, jede Bahn von G enthalte genau eine lange Bahn von A. Dann:

(a) $g \in G$, $\operatorname{Tr} A \cap \operatorname{Tr} A^g \neq \emptyset \Rightarrow \operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} A^g$.

(b) $\operatorname{Gr} A > \frac{1}{2} \operatorname{Gr} G \Rightarrow \operatorname{Gr} A = \operatorname{Gr} G$, d.h. $\Omega_A = 0$.

4 G pri, $A \operatorname{sn} G_\alpha$, $\operatorname{Gr} A \geq \frac{1}{2} \operatorname{Gr} G$, jede lange Bahn von G_α enthalte höchstens eine von A. Dann $\operatorname{Gr} A = \operatorname{Gr} G_\alpha$, d.h. $A \operatorname{tra} \beta^{G_\alpha}$ $(\forall \beta \neq \alpha)$.
Bew: Sonst G_α nach 3 zerschneidbar, da oBdA A unzerschn.

204/205

5 $A \leq G$ habe Fixpkt und sei maximal mit minimalem $l(A)$. Desgl. B.
Ist B trivial auf einer (beliebigen, lg od kurzen) Bahn von A, so ist B sn $\langle A, B\rangle$. [mit Bleistift:] Läßt B einen Konst Γ von A fest und hat die subnormale Hülle von B^Γ in $\langle A, B\rangle^\Gamma$ einen Fixpunkt, so ist $B \operatorname{sn} \langle A, B\rangle$.

6 Zwei Gruppen A, B mit Vor. 5 (Tinte) sind genau dann kosubnormal, wenn jede auf einer pass. Bahn der anderen trivial wirkt.

7 Sei A und $B \leq G$, $l(A) = \min = l(B) = l$, A, B max. Wenn $l(\langle A, B\rangle) > l$, so A, B kosubnormal.

Unterpunkt 8 ist rot durchgestrichen

[rot durchgestrichen mit der Anmerkung „s. aber“:]

Satz 8 $A \lhd\lhd G$, A^G transitiv $\Rightarrow$ alle Bahnen von A sind konjugiert unter G (und daher gleich lang).
Bew: Gegenb mit $|G|$ min, A max. N min NT von G. Fall I: $A < AN$. Dann je zwei Bahn. von AN konj, darin die von A wegen $A \trianglelefteq AN$.
[Randbemerkung: Trugschluß! Das genügt nicht *]* Fall II: $A = AN$, $N \leq A$. Betrachte $\overline{\Omega} := \Omega : N$. $\overline{G}$ auf $\overline{\Omega}$. Die Bahnen von $\overline{A}$ sind die Bahnen von A, aufgefaßt als Vereinigungen von Bahnen von N.

205/206

Noch lange Bahnen: Extremalgruppen

1 Def. Sei G PermGr, $A \leq G$, A unzerschneidbar in $G^{(2)}$, $\operatorname{Gr} A \geq \frac{1}{2} \operatorname{Gr} G$, $\Omega_A \neq 0$, jedes Erzeugnis von A mit weiteren (Konjugierten) Ähnlichen, das noch einen Fixpunkt hat, habe mehr lange Bahnen als
A: $l(A, A^{g_1}, \ldots, A^{g_n}) > l(A) = l$ wenn $A^{g_1} \neq A$. Schreibe $A \operatorname{extr} G$.

2 $A \operatorname{extr} G$, $A \leq G_\alpha \Rightarrow A \operatorname{sn} G_\alpha$.

3 $A \operatorname{extr} G$, $A \leq H \leq G$; jede Bahn von H enthalte höchstens eine lange von A. Dann A tra auf jeder solchen Bahn von H. 204_3.

4 $A \operatorname{extr} G$, $l\langle A, A^g\rangle = l + k = l(A) + k$, $A \neq A^g$, $(k > 0)$. Dann hat A (und A^g) mindestens $k + 1$ isolierte lange Bahnen in $\langle A, A^g\rangle$. Allg:

4′ $A, B \operatorname{extr} G$, A**???**B; $l\langle A, B\rangle = l(B) + k$. Dann hat A mindestens $k + 1$ isolierte lange Bahnen.

206/207

Satz 5 $A \operatorname{sn} G \operatorname{tra} \Omega$, $\Omega_A \neq \emptyset \Rightarrow A^G$intra.
Bew: $\exists A \trianglelefteq \langle A, A_1 \rangle \trianglelefteq \langle A A_1 A_2 \rangle \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq A^G$ mit $A_i \underset{G}{=} A$. Schritt betrachten bei dem hypoth. Transitivität erreicht wird.

Allgemeiner und wohl schon früher gefunden:

Satz 5* Sei $A_i \operatorname{sn} G$, G tra, jedes $\Omega_{A_i} \neq \emptyset$, $A := \langle A_i \rangle$, dann A intra. Sonst $\exists g_i \in A$: $\alpha \in \Omega_{A_i^{g_i}}$, $\alpha \in \Omega_{\langle A_i^{g_i} | i \rangle} = A$.

Bem. 6 $A \operatorname{sn} G = \operatorname{tra}$, $\Omega \neq \Omega_A \neq 0 \Rightarrow \exists g \in G : A^g$ hat eine lange Bahn in Ω_A. Bew wie für 5.

207/208

Lange Bahnen

Def 0 G PGr. Ein Extremalsystem ist eine G-inv. Menge $\mathcal{E}$ von Ugr von G:

(a) mit festem $l(E) = l > 0$
(b) $\Omega_E \neq \emptyset$
(c) Aus $A_i \in \mathcal{E}$, $A_1 \neq A_2 \neq \ldots$ und $\Omega_{\langle A_i | i \rangle} \neq \emptyset$ folgt $l\langle A_i \rangle > l$ und
(d) in mind. einer Bahn von $l\langle A, B \rangle$, falls $\Omega_A \cap \Omega_B \neq \emptyset$, $A \neq B$ in $\mathcal{E}$ kommen ≥ 2 lange Bahnen von A oder B vor.
Seien $A, B \in \mathcal{E} = $ extr in G. Dann:

(1) ✓ $A \leq G_\alpha \Rightarrow A \operatorname{sn} G_\alpha$.

(2) ✓ $l\langle A, B \rangle = l + k$, $k > 0 \Rightarrow A$ hat mindest. $1 + k$ lange Bahnen in Ω_B, und $A \operatorname{sn} \langle A, B \rangle$. Bew mit

Hilfs(3) ✓ $A \leq H \leq G_\alpha$, eine Bahn von H enth. 0 lange von A; jede Bahn von H enth. ≤ 1 lange Bahnen von $A \Rightarrow A$ ist auf jeder Bahn transitiv oder trivial.

(4) ✓ $A \neq B$ in $\mathcal{E}$ mit gem. Fixpkt $\Rightarrow A$ und B haben mindestens je 2 isolierte lange Bahnen.
Bew d), 2

Def 0′) $A, B \leq \mathfrak{E}$, für die langen Bahnen Γ_i von $\langle A, B \rangle$ sei $l(A^{\Gamma_i}) = \alpha_i$, $l(B^{\Gamma_i}) = \beta_i$, $\alpha(A, B) = \max \alpha_i$, $\beta(A, B) = \ldots$ $\mu(A, B) = \max(\alpha, \beta)$, $\sigma = \max(\alpha_i + \beta_i)$.

208/209

(5) $\mu(A, B) = 1 \Rightarrow A = B$ wenn $\Omega_A \cap \Omega_B \neq \emptyset$.
$\Updownarrow$
NB: $\sigma(A, B) \leq 2$

(6) Eine tra PGr des Grades n werde erzeugt von $A, B \leq G$, und B habe einen Fixpunkt. Dann enthält jede Bahn von A einen Fixpunkt von B.

Bew: OBdA nimm B maximal mit Fixpunkt unter den Erzeugnissen besser C
$\langle B^{g_i}, i \in I\rangle$, dann ist Ω_B ein Block Γ für G, dessen Konj. werden transitiv statt B ?
von A perm.

(6′) Zusatz: Jede Bahn von A enthält den gleichen Prozentsatz von Fixpunkten von B. Denn wenn $\Omega_B \cap \Gamma^g \neq \emptyset$, so $\Omega_{B^{g^-}} \cap \Gamma \neq \emptyset$, daher $\Omega_{\langle C, B^{g^-}\rangle} \neq \emptyset$, $B^{g^-} \leq C$, $B \leq C^g$, $\Gamma^g \subset \Omega_B$. Ω_B besteht aus vollen konj. Blöcken zu Γ.
Forts. S. 216

209/210

Klumpen & Zerschneidung

Def: $G \leq \operatorname{Sym}\Omega$, $G = G^{(2)}$, $\Delta \subseteq \Omega$, $(\Gamma := \Omega - \Delta)$. Die "Klumpen" von Δ bezüglich G sind die Äquivalenzklassen auf Δ von:

$$\delta_1 \sim \delta_2 \Leftrightarrow \forall_{\gamma \in \Gamma} : \delta_1^{G_\gamma} = \delta_2^{G_\gamma}$$

(1) Seien $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ die Klump. von Δ, $\Delta = \sum \Delta_i$. Genau dann kann man $G(\Delta)$ $(= G(\Gamma))$ zerschneiden, d.h. $G(\Delta)^\Delta \leq G^{(2)})$, wenn Δ jedes Δ_i einzeln fest läßt. Dass es sie höchstens vertauscht, ist klar. Also die größte durch $\Omega = \Gamma + \Delta$ zerschneidbare Ugr ist der Fixator von $\Delta = \sum \Delta_i$. Klumpen von $\delta = \bigcap_{\gamma \notin \Delta} \delta^{G_\gamma}$.

(2) Sind $\Delta = \sum \Delta_i$, $\Delta' = \sum \Delta'_k$ die Klumpenpart. bezgl. (Γ, Δ) und (Γ', Δ'), so sind die nichtleeren $\Delta_i \cap \Delta'_j$ jeweils genau die Klumpen von $\Delta \cap \Delta'$. Denn $\xi, \eta \in \Delta_i \cap \Delta'_j \Rightarrow \xi, \eta$ in derselben Bahn für jedes G_α, $\alpha \in \Gamma \cup \Gamma'$. Umgekehrt folgt aus letzterem das für alle $\alpha \in \Gamma$ und alle $\beta \in \Gamma'$, also ξ, η impl. Δ_i, Δ'_j.

210/211

(3) Ist $\Delta \subseteq \overline{\Delta}$, so besteht jedes $\overline{\Delta}_j$ aus vollen Δ_i.

(4) Die Klumpen von $\Delta \cup \Delta'$ bestehen aus vollen Zusammenhangskomponenten der Vereinigung der Graphen zu Δ und Δ' (können aber aus mehreren solchen bestehen, da aus $G_\Gamma = 1 = G_{\Gamma'}$ nicht folgt $G_{\Gamma \cap \Gamma'} = 1$).

(6) Für $A \leq G \leq \operatorname{Sym}\Omega$ sei $k(A)$ die Anzahl der Klumpen von A, d.h. von TrA. Ist $A \leq B \leq G$, so ist $k(A^{\cdot\cdot B}) \leq k(A)$. Sonst hätte $A^{\cdot\cdot B}$ einen Klumpen, der keinen von A enthält, daher A dort trivial, also auch $A^{A^{\cdot\cdot B}} = A^{\cdot\cdot B}$.

(7) Sei $l := \min k(A)$, $1 \neq A \leq G$, $\Omega_A \neq \emptyset$. "Heiße A extremal", wenn A maximal in $\{B \mid k(B) = l\}$. Dann $A \leq G_\alpha \Rightarrow A \operatorname{sn} G_\alpha$. Sei $\mathfrak{A} = \{A \mid A \text{ extr. in } G\}$. Weiter stets $A, B \in \mathfrak{A}$.

211/212

$A, B \in \mathfrak{A}$,

8. $A \neq B$, $\Omega_A \cap \Omega_B \neq \emptyset \Rightarrow k\langle A, B\rangle > l$.

   [Reihenfolge aufgrund eines Verweises im Skript geändert]

9. $A, B \in \mathfrak{A}$, jeder Klumpen von $\langle A, B\rangle$ enthalte höchstens einen von A; sei $\mathrm{Tr}A \cap \mathrm{Tr}B \neq \emptyset$ und $\Omega_A \cap \Omega_B \neq \emptyset$. Kurz: $\mu(A, B) = 1$ ($208_{0'}$). Dann $A = B$. Bew: Wenn $A \neq B$, so $k\langle A, B\rangle > l$. Es ist $A \trianglelefteq \langle A, B\rangle$. Sonst $\langle A, A^b\rangle < A$. Indukt nach Ord: A, A^b erfüllen trivialerweise dieselbe Vor, also $A = A^b$. B läßt also den einzigen Klumpen von A in einem gegeb. Kl. von $\langle A, B\rangle$ fest, nach 210 (1) kann man B längs $\mathrm{Tr}\,A$ zerschneiden. Die Klumpen von $\mathrm{Tr}\,B \cap \mathrm{Tr}\,A$ sind genau die nichtleeren $\Delta_i \cap \Delta'_j$, $\Delta_i = \mathrm{Kln}\,A$, $\Delta'_j = \mathrm{Kln}\,B$.

   [Ende von Unterpunkt 9 bereits auf Seite 213]
   Jeder der (nach 8 weniger als l) nichtleeren Schnitte Klump $A \cap$ Klump B ist ein Klumpen von $B^{\mathrm{Tr}A} \leq G$, also $k(B^{\mathrm{Tr}A}) < l$, $B^{\mathrm{TrA}} = 1$, $\mathrm{Tr}\,B \cap \mathrm{Tr}\,A = \emptyset$, Wid.

10. $A \in \mathrm{A}$, $H \leq G_\alpha$, jeder Klumpen von $\mathrm{Tr}H_0$ $\mathrm{Tr}A$ enthalte <u>höchstens einen</u> Klumpen von A. Dann kann man H längs $\mathrm{Tr}A$ schneiden:

$$H^{\mathrm{Tr}A} \leq G;$$

   Bew. wie 9: Die Kln von H^A sind die $\Delta_i \cap \Delta'_j$, wo $\Delta_i = \mathrm{Kln}\,H$, $\Delta'_j = \mathrm{Kln}\,A$.
   212/213

11. $A \neq B$ in $\mathfrak{A}$. $\Omega_A \cap \Omega_B \neq \emptyset$, $\mathrm{Tr}A \cap \mathrm{Tr}B \neq \emptyset \Rightarrow A$ hat mindestens zwei isolierte Klumpen in $\langle A, B\rangle$.

11′. Allg: $k(\langle A, B\rangle) = l + m \Rightarrow$ Es gibt mind. $m + 1$ Klumpen von $\langle A, B\rangle$, die ganz aus Fixpunkten von A bestehen. Sonst erfüllt A mit $H := B$ die Vor. 10

$$k(B^{\mathrm{Tr}A}) < l, \quad \text{Wid.}$$

   Ebenso:

12. A, B in $\mathfrak{A}$, $\mathrm{Tr}\,A \cap \mathrm{Tr}\,B \neq \emptyset$, $\Omega_A \cap \Omega_B \neq \emptyset$, $\alpha(A, B) = 1 \Rightarrow A = B$.
   213/214

13. $l \leq 4$, $\begin{cases} \Omega_A \cap \Omega_B \neq \emptyset \\ A, B \text{ in } \mathfrak{A} \Rightarrow A, B \trianglelefteq \langle A, B\rangle \end{cases}$
   Bew: $l = 4 \cdot \mathrm{Typ}(A, B) = (1, 0)(1, 0)(0, 1)(0, 1)*$ oder $**$.
   OBdA $A \neq B$. Nach 11 gilt:
   $\langle A, A^b\rangle$ ist vom Typ $(1, 1)(1, 1)(1, 0)(1, 0)(0, 1)(0, 1)$ falls $A \neq A^b$, Wid.
   ($l \leq 3$ noch einfacher ebenso).

Satz 14. G pri, $l := \min\limits_{1 \neq B \leq G} k(B) \leq 4$, $A \leq G$, $k(A) = l \Rightarrow A$ trifft jede Bahn von G_{α_s} die hat genau l lange Bahnen.
Bew: sonst $N := A^{G_\alpha}$, OBdA A max. $\Rightarrow \in \mathfrak{A}$. $|\Omega_N| > 1$. $\exists \beta \in \Omega_N$, $\beta \neq \alpha$.

Aus $A^g \leq \Omega_\beta$ folgt $A^g \leq \mathcal{N}(N) = G_\alpha$ aber der schwache Abschl von A in G_β hat keine Fixgr $\neq G_\beta$.

NB: Also $A = G_\alpha$ bei $l \leq 4$

214/215

Vermutung 15 Unter Vor. 14 hat vielleicht der schwache Abschluß von A in G_α höchstens l Bahnen.
Hat vielleicht G_α, wenn es nicht durch subnormale Hüllenbildung aus A entsteht, sogar $\leq l-1$ lange Bahnen?

16 $\alpha \neq \beta$, $N \trianglelefteq G_\alpha$, $N \operatorname{sn} G_\beta \Rightarrow N^{qp} = 1$, sonst jedes $A^g \leq G_\alpha \leq \mathcal{N}(N) = G_\alpha$, Abschluß A in G_β hat weiteren Fixpunkt.

17: Methode: $\exists \alpha, \beta$: [Für] $E := \langle A \in \mathfrak{A} \mid A \leq G_{\alpha\beta}\rangle$ [ist] $\Omega_E =: \Delta$ minimal.
Denn: $|\Delta^g \cap \Delta| \leq 1$ für $\Delta^g \neq \Delta|$ (Wenn alle lange Bahnen von E Längen $\equiv 0(q)$ haben, so $G(\Delta)\operatorname{tra}\Delta$).

[*Randbemerkung* Δ kann nichts in $G(\Delta)$ zerschneiden: $1 \neq u \in G_{\Omega-\Delta} \Rightarrow u \in A$ wegen $l = \max$

Stets $\exists\, O_p(A) \neq 1$ für ein $A \leq G(\Delta)$ und $\exists\, l(A) < p$ für jeden Isotyp von Konst $\Rightarrow l(G) \leq l$. Ist $\Delta \underset{G}{\neq} \Delta' \neq \cdots$ und gibt es $k(k', \sim)\Delta^g \ni \alpha \ldots$, so $\sum k(|\Delta| - 1) \leq |\Omega| - 1$
$G(\Delta)$ zerschneidet $U(\leq G(\Delta)) \Leftrightarrow \forall \xi \notin \Delta\ \forall \eta^{G_\xi} : \eta^{G_\xi} \cap \Delta$ invar. bei U
$\Leftrightarrow \forall_{\xi \notin \Delta}$ gilt: $G(\Delta)_\xi$ -Bahnen innerh. Δ sind U-inv.
$\Leftrightarrow \forall \eta \in \Delta\ G(\Delta)_\eta$ -Bahnen außerh Δ 〃 〃 .

Forts 219

215/216

$\trianglelefteq\trianglelefteq$ und Bahnen Forts. von 209

1. Sei G tra Ω; $A \operatorname{sn} G$, $B \operatorname{sn} G$ 4(2) $\operatorname{Gr} B < \operatorname{Gr} G$, $G = \langle A, B\rangle$. Dann A tra Ω.

Bew: Es gibt einen Block Γ von G der aus den Fixpunkten der schwachen Abschließung von B in G_α besteht. Jede Bahn von A trifft Γ, und Ω_B besteht aus von Konjugierten $\Gamma_i = \Gamma^{g_i}$ (vgl. S.209). A^Gtra, sonst ließe B eine Bahn davon fest. OBdA ist $\langle A^g, A\rangle$ tra für jedes $A^g \neq A$, aber A intra.

$\exists\, h \in G : A \trianglelefteq \langle A, A^h\rangle$ tra. Je $2 \times \#$ der Fixpunktblöcke von $B <$ Anz. der $\Gamma_i - 1$, gibt es 2 Γ_i's in Ω_B.

Jede Bahn von A enthält also 2 Fixpunkte von $\langle B, B^h\rangle$

Satz 2 allg. 4 $A \operatorname{sn} G$, A^G tra Ω, $\Omega_A \neq \emptyset \Rightarrow |\Omega| = 1$, dh $|\Omega| > 1$, $\Omega_A \neq \emptyset \Rightarrow A^G$ intr.

Bew Ind $|\Omega|$ mit $\overline{\Omega} := \Omega/N$, $N \cdot\!\!\triangleleft\, G$. $A \trianglelefteq AN$.

216/217

Satz 3 Ein Subnomalteiler A der trans. Gruppe G habe nur 2 Bahnen; dann sind diese in G konjugiert.

4 $A_1, \dots, A_n \operatorname{sn} G$ auf $\Omega \langle A_1, \dots, A_n \rangle \text{tra} \Rightarrow |\Omega| = 1$.
Bew: $\exists g_i : A_i^{g_i} \in G_\alpha$, aber $\langle A_i^{g_i} \rangle = G$.

5 $A, B \leq G$, $AB = BA \Rightarrow$ auf jeder Bahn von AB, in der A einen Fixpunkt hat, ist B transitiv.

217/218

$\lhd\lhd \quad \infty$

Frage 1 Ist $G = AB$; $A, B \operatorname{sn} G$; $A = A'$ und $|G| < \infty$, so $G = A_B \cdot B$ (sogar $G = (A_B)^{\mathfrak{G}} B$); gilt das auch für $|G| = \infty$?

Satz 2 von Kegel; Math Ann 163 (1966)

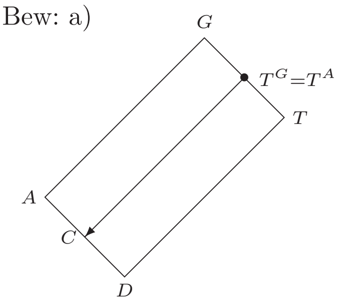
Sei $\mathfrak{X} \subseteq \operatorname{Ugr} G$, abgeschl. gegen $X \mapsto X^g$, Normalteiler und "normale" Produkte ($\mathfrak{X}$ "subjunctive" Fitt.Klasse), $A = A' \operatorname{sn} G$.

Dann

a) $A \leq \bigcap_{\substack{S \operatorname{sn} A \\ S \in \mathfrak{X}}} \mathcal{N}S \Rightarrow A \leq \bigcap_{\substack{T \operatorname{sn} G \\ T \in \mathfrak{X}}} \mathcal{N}T$.

b) Entsprechend für $\mathcal{C}$ statt $\mathcal{N}$.

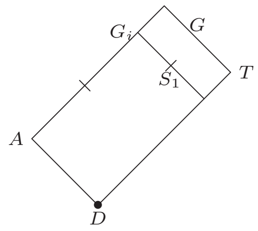
Bew: a)



OBdA: $AT = G$. Ind. $d = 0\checkmark$, $d = 1$. $A \trianglelefteq G$.

α) $|G - T| = 2$, OBdA $D = 1$, $C, T \lhd T^G$, $C \cap T = 1$, $[C, T] = 1$. $[C, T^a] = 1$, $[C, T^G] = 1$, $[C, C] = 1$, C abelsch. $x \in C : \langle x \rangle \trianglelefteq A$, $\operatorname{Aut}\langle x \rangle$ abelsch, $A = A'$, also $x \in \operatorname{Ztr} A$. $C \leq \operatorname{Ztr} A$ für t fest $\in T$: $t^a = c(a) \cdot t$, $t^{aa'} = c(a) t^{a'} = c(a) c(a') t$, $a \to c(a)$ ist $\in \operatorname{Hom} A$, Bild $\leq C$ abelsch, $A \leq \mathcal{N}(T)$

β) $|G \cdot T| > 2$, Indukt.
$d > 1$: Bew 2) Indukt $|G - B|$;



Nach Induktion ist $T_1 = T_1^A \lhd G$, gehe zu G/T_1: $G_1 = G_1'$ norm, alle $S > 1$.

<u>FRAGE 3</u>: Genügt statt $A = A'$ auch $A \perp B$? NB: Beim Beweis gilt $[B', A] = 1$.

218/219

Lange Bahnen-Zahl
Forts. von 215

25.9.77

Satz (1) <u>Vor $*$</u> $Z(G(\Delta))^\Delta \neq 1$ &
$l(A) < q \Rightarrow l(G_\alpha) \leq l(A)$, sogar Gr $A = n - 1$
$\downarrow$ hier genügt schon, daß die Anzahl der "Klumpen" (210) gegebenen Isomorphietyps $\neq 1$ stets $< q$ ist.

Bew: Sei $A \leq G(\Delta)_\alpha$, $A^\Delta \neq 1$; Wähle $\alpha \in \Delta$, $Q \in q$-Syl $G(\Delta)_\alpha$, $Z \leq \operatorname{Ztr} Q$. Wegen $(A_i, \mathbf{???})^{\cdot\cdot G_A A} = A_i$ $(\leq G_A)$ ist $Z \subseteq \mathcal{N}(A_i)$
$\forall A_i \leq G(\Delta)_\alpha$; läßt jeden Block von A_i fest, daher auch von $\langle A_i \rangle$. Ist $Z^\Delta \neq 1$, so $\leq G_{\Omega - \Delta}$, $(Z^\Delta)^{G(\Delta)} \operatorname{tra} \Delta$, erzeugt mit A etwas größeres ohne Wachsen von l, hat noch Fixpkte in $\Omega - \Delta$.

ungefährer Satz 2: # kln $A < q$, $|A| = p^\alpha q^\beta$, $\alpha\beta > 0$, $\exists\ A, B, C\ \ A \lhd B$, $A \lhd C$, $B\ \cancel{\text{csn}}\ C$
$\Rightarrow A = G_\alpha$

Bew: zerschneide B, C mittles Tr A.

<u>Befreiung</u> von Vor 1*: Wähle $\boxtimes$ ABC: $A \leq G_\Delta$, $B, C \leq G(\Delta)$, $\not\leq G_\Delta$, B nicht csn C, $A \trianglelefteq \langle A, B, C \rangle = K$. Dann kann man jede Sylowgr von K zuschneiden durch Δ.

? $\boxtimes$ Besser: $E := \langle A \in \mathfrak{A} \mid A^\Delta = 1 \rangle$, $\exists B, C \leq G(\Delta)_1 \in \mathfrak{A}$. $B \neq C$ in $G(\Delta) - G$. Dann B, C nicht csn, $B, C \leq \mathcal{N}(A)$, $l_{???}(E) \underset{?}{\leq} l$, sicher genügt #Klumpen $A < q$.

219/220

Ziel (1) Sei A maximal mit folg. Eig. bei geg. M: $A \leq M \lessdot G$, $\forall_g$ ($A \leq M^g \Rightarrow A \operatorname{sn} M^g$) $A \notin \operatorname{sn} G$, $A \leq M^h \Rightarrow M^h = M$. oder ähnlich: $G = G^{(2)}$.

Satz 2 Wenn A unzerschneidbar, von seinen r-Sylowgr. erzeugt wird und $A^g \leq \mathcal{N}(A)$ weniger als r Klumpen hat, so Tr $A^g =$ Tr A.
Bew: $Q \in r\text{-Syl}\langle A, B\rangle$; dann kann man A^g vermöge Tr A zerschneiden.

Satz 3 Im $l(G_\alpha)$ Problem werde A von den r Syl Gr erzeugt und habe $l < r$ Bahnen. Dann $l(G_\alpha) \leq l$.
Bew: Wähle l min sonst $\exists A$ csn A^g.

Methode 4 Generell für $A \leq G$ untersuchen die <u>minimalen</u> $H \leq G$, die durch zwei nicht kosubnormale Konj. von A erzeugt werden können.

220/221

gesamte Seite leer

221/222

Vor: $A \operatorname{sn} G_\alpha$ sobald $A \leq G_\alpha$ und es gibt solche α. $A \notin \operatorname{sn} G =$ pri
4.10.77

(1) Aus $A_1 \operatorname{sn} A$ folgt Grad $A_1 \geq 2f$, $f := |\Omega_A|$. Genauer (2)

Bew: $A_1 \notin \operatorname{sn} G$. $\exists a_1 \in A \exists g \in G$: $A_1 \notin \operatorname{sn}\langle A_1, A_1^{a_1 g}\rangle$. Dann $A \notin \operatorname{sn}\langle A, A^{a_1^g}\rangle$ A^{a_1} bewegt ganz Ω_A. a_1^g bringt f Pkte von Tr A nach Ω_A, Gr $A_1 \geq$ Gr $a_1^g \geq 2f$.

(2) Stets ist $\mu := \min \operatorname{grad} A \geq 2f$, $f := |\Omega_A|$.

Bew: Sei Gr $a = \mu$, $a \in A$. $T := \{a^g \mid g \in G\}$ ist eine Testmenge für (A_0, G), wenn $A_0 : \langle a\rangle^{\cdot\cdot A}$, dann $A_0 = \langle A_0 \cap T\rangle$ (s. Hauptseparat). Da $A_0 \notin \operatorname{sn} G$ (wegen Gpri, $\Omega_{A_0} \neq \emptyset$), $\exists t \in T : A_0 \notin \operatorname{sn}\langle A_0, A_0^t\rangle$. Dann ist erst recht $A \notin \operatorname{sn}\langle A, A^t\rangle$, da $A_0 \operatorname{sn} A$. Also haben A, A^t keinen Fixpunkt gemeins., Gr $t \geq 2f$, aber Gr $t =$ Gr $a = \mu$.
Noch schärfer:

Satz (3) Ist $a \in A$ und Ord $a \in \mathbb{P}$, so enthält a mindestens f Zyklen der Länge > 1.

(3′) Genauer: ein passendes a^g, $g \in G$, enthält in seinen langen Zyklen ganz Ω_A, und in jedem Zyklus nur $\leq$ einen Pkt von Ω_A.

222/223

Bew: Sonst gäbe es zu jedem $g \in G$ mindestens ein $t \in \langle a^g\rangle - \{1\}$, das einen Fixpkt von A in einen ebensolchen überführt, denn von den f Fixpunkten von A ist entweder einer auch fix bei a^g, oder zwei liegen in demselben Zyklus der Länge > 1.

Zu jedem g so ein T gewählt gibt wieder eine Testmenge für $(\langle a\rangle^{\cdot\cdot A}, G)$, für die stets $A \operatorname{sn}\langle A, A^t\rangle$ und damit $A_0 \operatorname{sn}\langle A_0, A_0^t\rangle$ wäre ($A_0 := \langle a\rangle^A$).

(3″) Wenn $a \in A$, Ord $a = r \in \mathbb{P}$, so Grad $a \geq r \cdot f$. (Bew 3′)

Satz (3‴) $a \in A$, $\mathrm{P} \ni r \mid \operatorname{Ord} a \Rightarrow \operatorname{Grad} a \geq rf$. Daher $\mathbb{P} \ni r \mid |A| \Rightarrow \operatorname{Grad} A \geq rf$.

〃 (3^{IV}) Zu jedem $a \in A$ mit ord $a \in \mathbb{P}$, $n := |\Omega| \geq (r+1)f$, $f \leq \frac{n}{r+1}$, $\exists\, g \in G:\ a^g$ enthält keine Bahn Λ mit

$$|\Lambda \cap \Omega_A| > 1.$$

223/224

Satz 4 Sei $B \leq G$, $G \supseteq T = T^g \quad \forall g \in G$ und

(a) $B \operatorname{sn}\langle B, B^t\rangle \forall t \in T$. Dann ist $\langle B \cap T\rangle \operatorname{sn} G$.
Statt (a) genügt auch (nach Bartels' Satz)

(b) T enth. nur primäre El'te, und $t(\circ b)^\infty \in B \quad \forall\, b \in B \cap T$ (also z.B. erst recht $t \in \operatorname{sn}^*_G(B)$, $\forall t \in T$).

224/225

“Vertauschbarkeit und Subnormalität”

Leichte Aufgabe: Welche p-Untergruppen sind mit allen p-Untergruppen der endl. Gr. G vertauschbar? Liegen sie im Hyperzentrum von G? vgl. Maier-Schmid. Klar: Sie liegen in jeden p-Sylowgruppe, also in $O_p(G)$

“ Satz von Frattini”

1. Verallg: $\Phi_p(G) := \bigcap\limits_{\substack{M \lessdot G \\ |G:M| \not\equiv 0 \pmod p}} M$
   besitzt nur eine einzige
   p-Sylowgruppe.
   Steht das eine schon bei FRATTINI selbst? oder im gelben Skript von CARTER?

2. Kann man Gaschütz MZ 58 auf Φ_p verallgemeinern?

3. Nenne $A < G$ groß, wenn $\exists g_1, \ldots, g_n : G = \langle A, g_1, \ldots, g_n\rangle$. Nenne A, B benachbart, wenn $A \cap B$ groß in A und B.

FR.: Ersprechendes für $\Phi_\pi(G)$?

225/226

$\mathcal{M}_\pi G$ (UAd Schreier V)
genügt: $A \leq \mathcal{E} \operatorname{Aut} F \Rightarrow A$ läßt $\mathcal{E}$-Untergr $\neq 1$ von F fest

16.11.77

(1) UAd Schr V: Sei $A \in \pi G$, $M \in \mathcal{M}\pi G$, sei $\{G_\lambda\}$ eine Normalreihe von G, und A lasse jedes nicht aufl. $M\neg G^\lambda$ fest (dh. $A \leq \mathcal{N}(M \cap G_{\lambda-1})G_\lambda$). Dann ist $A \underset{\langle A,M\rangle}{\leq} M$.

Bew: Indukt. $|G|$: OBdA sind alle $\mathcal{N}(M \cap G_{\lambda-1})G_\lambda \trianglelefteq G$.

[Für $\mathcal{M}\mathfrak{S}_\pi G$ statt $\mathcal{M}_\pi G$ gilt's ohne Schreier]. (1) steht schon in Vorl.77 (Breu §14)

(1) folgt aus

(2) UAdSchV: $M \in \mathcal{M}\pi G$, $\{G_\lambda\}$NR G, für jedes nichtauflösbare G^λ sei
$M\neg G^\lambda = \begin{cases} G^\lambda \text{ oder} \\ 1 \end{cases}$.

(a) Dann gilt f jedes $M_1 \in \mathcal{M}\pi G$: $M_1 \leq_G M$, d.h:
(b) $c_\pi G = 1$.
(c) Gilt π-separiert

Bew: Verfeinere $\{G_\lambda\}$ zu Hauptreihe, unterstes Glied ist $\in \pi G$ oder $\pi' G$, wenn auflösbar, aber auch 〃 〃 , wenn nicht (nach Vor.).

Hieraus folgt allgemeiner:

(3) $M \in \mathcal{M}\pi G$, $\{G_\lambda\}$NR G, $H := \bigcap_{G^\lambda \notin \mathfrak{S}} \mathcal{N} M\neg G^\lambda \Rightarrow H$ ist π-separiert, $c_\pi H = 1$.

NB: "submaximal" wäre nicht konsistent mit subnormal.

226/227

FRAGE (4) Sei

$$H := \bigcap_{\substack{M \in \mathcal{M}\pi G \\ G^\lambda \notin \mathfrak{S}}} \mathcal{N}_G(M\neg G^\lambda)$$

Ist H eine <u>maximale</u> π-separierte Ugr?

FRAGE (5) Hat jedes $M \in \mathcal{M}\pi G$ eine Projektionseigenschaft für direkte Produkte von einfachen Subnormalfaktoren von G, von denen einer (oder beide) nichtabelsch ist? Wohl <u>"ja"</u>, wenn der Rumpf jedes eink.pf. SNT's von G auflösbar.

Nebenbemerkung [NEIN! 242_{36} *]*

Verm. (6) Aus $M, L \in \mathcal{M}\pi G$, $M\neg\text{Kopf}E_i = L\neg\text{Kopf}E_i$ für die "Einköpfe" (perfekten) folgt $M_G = L_G$. Für $A \leq M$ ist auch <u>notwendig</u>, dass A die $L\neg\text{Kopf}E_i$ permutiert.

Aufg (7) (a) Nachprüfen, ob man von <u>der</u> Projektion eines $M \in \mathcal{M}\pi G$ in einen "abstrakten" Kompositionsfaktor reden kann.
Nebenbemerkung [NEIN *]*

(b) Ist die Proj. in einen nichtabelschen Kompositionsfaktor immer groß?
Nebenbemerkung [NEIN *]*
Ist sie submaximal?
Nebenbemerkung [NEIN S.242 (36) *]*

227/228

Satz (8) Ist $T \trianglelefteq S \lhd\lhd G$, $M \in \mathcal{M}\pi G$ und $N \cdot\!\lhd G$ derart, dass S/T von N gemieden wird, so ist $|M\neg S/T| = |M\neg NS/NT|$.

(8′) Wenn man noch $L \in \mathcal{M}\pi G$ $|L\neg S/T| = |M\neg S/T|$ hat, so ist auch

$$|L\neg SN/TN| = |M\neg SN/TN|;$$

ebenso ohne Betragsstriche.

Satz (9) Seien $L, M \in \mathcal{M}\pi G$, $G_0 \trianglelefteq G$, und es gebe eine SNR von G_0, in deren nichtauflösbaren Faktoren L und M dieselben Projektionen haben. Dann ist $L \cap G_0 \underset{H}{=} M \cap G_0$, wo $H := \langle L \cap G_0, M \cap G_0\rangle$ gesetzt ist. Denn oBdA $G = \langle L, M\rangle$, dann G_0 π-separiert.

FRAGE (10) Ist jede "normal-maximale" π-Untergr von G (d.h. $\exists\widehat{G} : M = G \cap \widehat{M}$, $\widehat{M} \in \mathcal{M}\pi\widehat{G}$, $G \lhd \widehat{G}$) auch "holomorph-maximal"?

FR. (11) Kann man je zwei Erweiterungen von G unter einen Hut bringen? Was sagt Amalgamtheorie ? (ja wenn $Z(G) = 1$, Hut = $\operatorname{Aut} G$).

228/229

Satz (12) Sei $B \in \pi H$. Dann $\exists G, \varphi \in \operatorname{Epi}(G, H)$, $A \in \mathcal{M}\pi G$ mit $\varphi(A) = B$.
Bew: Stelle H (auf den Nebenklassen von) als reguläre Permutationsgrupe dar, $\operatorname{Grad}(H) = n$, wähle $N_1, \ldots, N_n$ isomorph zueinander mit $\geq$ zwei Klassen nichtisomorpher max. π-Ugr. Wähle M_i in <u>einer</u> Klasse maximaler π-Ugr von N_i für die i in einer festen Bahn von H, und M_i in einer anderen Klasse, so dass die $M_j \not\cong M_i$ sind. Dann $G := N_1 \times \cdots \times N_n$ erweitert mit H, $A := M_1 \times \cdots \times M_n$ erweitert mit B.
Allgemeiner 242_{36}

FRAGE (13) Sei $A \in \mathcal{AE}G$, $S \lhd\lhd G$, $S \operatorname{vtb} S^a$ $\forall a \in A$. Ist dann $A \cap S$ maximal unter denjenigen $\mathcal{E}$-Untergruppen von A, die bei $\mathcal{N}_A(S)$ invariant sind?

Geg.Bsp (14) Komp.fakt $(G) = \operatorname{Kf}(H) \not\Rightarrow c_w(G) = c_w(H)$. Bsp: $|G| = 2 \cdot 168$ mit $|N| = |168|$; $H = N \times C_2$; $\{2, 3\}$

H hat <u>wohl</u> Konj-Klassen mit Ord $94, 24, 6$, $c_\pi H = 3$

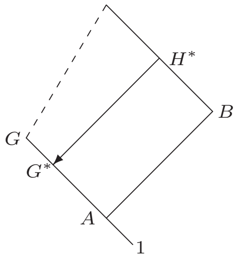
G 〃 〃 〃 〃 〃 $48, 12$, $c_\pi G = 2$

229/230

$\underline{\mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathcal{E}G} =: \mathcal{M}^{\lhd\lhd} G$ ($\mathcal{E}$ fest)

19.11.77

Def (1) A submaximale $\mathcal{E}$-Untergr. von G $:\Leftrightarrow$ $\exists H, B$: $G \lhd\lhd H$, $B \in \mathcal{M}\mathcal{E}H$, $A = G \cap B$. Dabei $\mathcal{E}$ „abgeschlossen“, d.h. eine Klasse von endl. Gruppen, abgeschl. gegen Ugr, Faktorgr, Erweiterung.



Frage: genügt Abgeschl. gegen Ugr und seminormale Produkte? Hierzu 245(41′)

(2) In der Situation (1) sei $B \leq H^* \leq H$, $G^* := G \cap H^*$. Dann ist auch A submaximal in G^*.

(2′) Sei $A \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathcal{E}G$. Dann $G_\mathcal{E} = A_\mathcal{E} \leq A$. Dann $G_\mathcal{E} \leq H_\mathcal{E} \leq B$.

FRAGE (2″) $A \in \mathcal{M}\mathcal{E}G$, $A \in \mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E} \Rightarrow A \in \mathcal{M}\mathcal{E}'G$? dh. $\mathcal{M}\mathcal{E}G \cap \mathcal{E}' = \mathcal{M}\mathcal{E}'G$.

Satz (3) Sei $A \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathcal{E}G$, Sei $F = F'$ einfach, $N := \langle F_i \in \operatorname{sn} G \mid F_i \cong F\rangle$. Dann ist A submaximal in $\mathcal{N}_G(N \cap A)$.

$*$ genügt: einköpfig und Rumpf $\in \mathcal{E}\mathcal{E}'$

Bew: Wähle H, B nach (1), und $L :=$ [mit Bleistift durchgestrichen, Korrektur unklar: $\langle F_j \in \operatorname{sn} H \mid F_j \cong F\rangle$]. Dann $L \cap G = N$, $L = N \times K$. Setze $H^* := \mathcal{N}_H(B \cap L)$. Dann $B \leq H^* \leq H$, und $G^* := G \cap H^* = \mathcal{N}_G(B \cap L) = \mathcal{N}_G\left((B \cap N) \times (B \cap K)\right) = \mathcal{N}_G(B \cap N)$ wegen $G \leq \mathcal{N}(B \cap K)$.

vielleicht entspr. für $N \circledast G$, $N \in \mathcal{E}'$ vgl 247

Bew für $*$: $L_0 := \operatorname{Rumpf} L$, $\overline{H} := H/L_0$, $\overline{L} = \overline{N} \times \overline{K}$, $K := L_0\langle F^h \leq G\rangle$; $[\overline{G}, \overline{K}] = 1$, $[G, B \cap K] \leq L_0$, $G \leq \mathcal{N}_H(B \cap K)$, $B \cap L = (B \cap N)(B \cap K)$, $\mathcal{N}_G(A) = \mathcal{N}_G(B \cap L) = G \cap H^*$, $B \leq H^* = \mathcal{N}_H(B \cap L)$.

[Randbemerkung: B??? H^*, $G^* \lhd\lhd H^*$, $B \cap G^* = \mathcal{N}_{(B \cap G)} = \mathcal{N}_A(B \cap H) = \mathcal{N}_A(B \cap G \cap N) = \mathcal{N}_A(A \cap N) = A$ *].*

230/231

(4) Aus $A_i \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathcal{E}G_i$ folgt $\bigtimes A_i \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathcal{E} \bigtimes G_i$.
Bew: $H := \bigtimes H_i$, $B := \bigtimes B_i$.

NB: Es wird wohl nicht ganz $\mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathcal{E} \bigtimes G_i$ so entstehen.

(5) Aus $A \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathcal{E}G$ und $\mathcal{E}^* \leq \mathcal{E}$ [auch abgeschlossen] folgt $G_{\mathcal{E}^*} \trianglelefteq A$. Denn $G_{\mathcal{E}^*} \leq H_{\mathcal{E}^*} \leq B$ in den Bez. von (1).

(6) $A \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathcal{E}G$, $\overbrace{\mathcal{E} \ni N \lhd G, \text{ aus } G \lhd\lhd H \text{ folge } G \cap N^H = N}^{\text{s. } 245_{43}}$; $\bar{\ } : G \to G/N$. Dann $\overline{A} \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathcal{E}\overline{G}$. Insbesondere:

(6′) Aus $\mathcal{E}^* \leq \mathcal{E}$, $N := G_{\mathcal{E}^*}$, $A \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathcal{E}G$ folgt $A/N \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}G/N$.

Bew (6): $\exists\ H, B$ (1). $K := N^H$ $\therefore$ $K \cap G = N$, $K \in \mathcal{E}$. Der kanonische Isomorphismus von $\overline{G} = G/N$ auf $\overline{G}K/K = \overline{\overline{G}}$ führt $\overline{A} = A/N$ in $AK/K =: \overline{\overline{A}}$ über, also genügt es zu zeigen: $\overline{\overline{A}} \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathcal{E}\overline{\overline{G}}$, hierfür genügt es wegen $\overline{\overline{B}} \in \mathcal{M}\mathcal{E}\overline{G}$ z.z.:

für $\overline{\overline{H}} := H/K$, $\overline{\overline{B}} := B/K$ ist $\overline{\overline{B}} \cap \overline{\overline{G}} = \overline{\overline{A}}$. In der Tat: $(GK \cap B)/K = (G \cap \overline{B})K/K = AK/K$.

FRAGEN (6*) (a) Folgt aus $A \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathcal{E}G$, $N \trianglelefteq G$, $N \in \mathcal{E}G$ stets $A/N \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathcal{E}G/N$, $A \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathcal{E}H$ für $H := \mathcal{N}_G(A \cap N)$?

(b) Folgt aus $G_{\mathcal{E}} \leq A \in \mathcal{E}G$ und $A/G_{\mathcal{E}}$ und $A/G_{\mathcal{E}} \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathcal{E}G/G_{\mathcal{E}}$ stets $A \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathcal{E}G$? NEIN $\to$ 251

231/232

$\mathcal{M}^{\lhd\lhd}$

(7) Aus $A \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathcal{E}G$, $\mathcal{E}^* \cap \mathcal{E} = \{1\}$ folgt: Für $N := G_{\mathcal{E}^*}$ ist $AN/N \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}G/N$. Unzulänglich BewSkizze: wie (6) mit Schur-Zass, da $(|H_{\mathcal{E}^*}|, |B|) = 1$. Bew ausführlich S. 246!

Satz (8) $A \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}G$, $G_1 \lhd\lhd G \Rightarrow A \cap G_1 \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}G_1$. Bew: (1) $G_1 \lhd\lhd H$, $G_1 \cap B = G_1 \cap G \cap B = G_1 \cap A$.

Bem 4.1.80:

(8,1) $\mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathcal{E}G$ ist invariant unter $\operatorname{Aut} G$. Denn isomorphe Gruppen haben isomorphe Erweiterungen. Bew mit monom. Darstellg.

HS (9) Sei $G_2 \trianglelefteq G_1 \leq G$, $A \leq H \leq G$, $H_i := H \cap G_i$.
Dann $\underbrace{(A \neg G_1/G_2)}\neg(H_1/H_2) = A \neg H_1/H_2$.

Bew: $= (A \cap G_1)G_2/G_2$.

(a) $[(A \cap G_1)G_2 \cap H_1]H_2 = [(A \cap H_1)G_2 \cap H_1]H_2 = (A \cap H_1)H_2$, denn $A \cap G_1 = A \cap H \cap G_1 = A \cap H_1$.

(b) $(G_2 \cap H_1)H_2 = H_2$.

??? (9a) $N \trianglelefteq G,\ N \leq A \leq G,\ G_2 \trianglelefteq G_1 \leq G,\ \overline{G}_i := G_iN \Rightarrow A\neg\overline{G}_1/\overline{G}_2 = (A\neg G_1/G_2)\neg G/N$
Bew: Zähler links $= (A \cap \overline{G_1})\overline{G_2} = (A \cap G_1N)G_2N = (A \cap G_1)NG_2$.
Zähler rechts $= (A \cap G_1)G_2N$.

232/233

$\mathcal{M}^{\lhd\lhd}$

Nenner links $= \overline{G_2} =$
〃 rechts $= G_2N$

HS (10) Dazu XI 10
$A, B \leq G$, $\{G_\lambda\}$SNR. Für ein μ sei $A\neg G^\mu = B\neg G^\mu$. Dann:

I. Ist $A, B \leq H \leq G$, $H_\lambda := H \cap G_\lambda$, so $A\neg H^\mu = B\neg H^\mu$.
II. Ist $N \trianglelefteq {}^{A}_{B}$, $N \trianglelefteq G$, $\overline{G} := G/N$, $\overline{G}_\lambda := G_\lambda N/N$, $\overline{A} := AN/N, \ldots$ so ist $\overline{A}\neg\overline{G}^\mu = \overline{B}\neg\overline{G}^\mu$ nebst $|\overline{A}\neg\overline{G}^\mu| = |A\neg G^\mu|$.
III. Ist $N \trianglelefteq G$, $(|N|, |A|) = (|N|, |B|) = 1$, $\overline{G} := \ldots$, so gilt Beh. II.
Bew; (9) (10) oder kürzer:
$\forall a \in A \cap G_{\mu-1} \exists b \in B \cap G_{\mu-1},\ x \in G_\mu$: $a = bx$.

I $a, b \in H_{\mu-1} \Rightarrow \exists x \in G_\mu$: $a = bx$, $x \in H$, H_μ.
II $\overline{a}, \overline{b} \in \overline{G}_{\mu-1} \Rightarrow$ alle Originale $a, b \in G_{\mu-1} \Rightarrow a = bx \Rightarrow \overline{a} = \overline{bx}$.
III $\overline{a} \in \overline{G}_{\mu-1} \Rightarrow a \in NG_{\mu-1} \Rightarrow a \in G_{\mu-1}$ wegen $G_{\mu-1} \lhd\lhd NG_{\mu-1} \Rightarrow \ldots$

(11) UAdSchreier V: $F = F'$ einf, $F \lhd\lhd G$, $A \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathcal{E}G$, $\mathcal{E}F \neq \{1\} \Rightarrow A \cap F \neq 1$ (sogar "groß")
Bew: bekannten Satz über $\mathcal{M}\mathcal{E}H$ auf (1) anwend.

Satz (12) OAdSV: $G = G'$ einfach $\Rightarrow \mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathcal{E}G = \mathcal{M}^{\lhd}\mathcal{E}G$.
Bew: $A \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathcal{E}G \Rightarrow \exists B, H$ nach (1). $B \cap G$ ist maximal unter den von $B_1 := \mathcal{N}_B(G)$ fest gelassenen $\mathcal{E}$-Untergr. von G. $G \trianglelefteq GB_1$. $\exists M \in \mathcal{M}\mathcal{E}$.
Wähle $\begin{cases} M \in \mathcal{M}\mathcal{E}(GB_1) \\ M \geq B \end{cases}$. Dann $B \cap G \leq M \cap G$ invar. bei M, B,
also $=$.

233/234

$\mathcal{M}^{\lhd\lhd}$

(12′) Hat G nur einen Kopf, $G = G'$, und ist der Rumpf auflösbar, so wird wie bei (2) gelten:
$$\mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathcal{E}G = \mathcal{M}^{\lhd}\mathcal{E}.$$

Satz (13) allg: (13′)

UAdSV. Seien $A, B \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathcal{E}G$, $\{G_\lambda\}_1^l$SNR, aus $G^\lambda \notin \mathfrak{S}$ folge $A\neg G^\lambda = B\neg G^\lambda$. Dann $A \underset{\langle A,B\rangle}{=} B$.

FRAGE: Kann man auf die G^λ mit totalem π-Sylowsatz <u>oder</u> nilpotenter π-Hallgr <u>oder</u> lauter nilpot. π-Ugr verzichten?

Bew: Gegenbeispiel $|G|$ min demnach l = max. Dann

(a) G_λ Kompreihe von G

(b) $G_\mathcal{E} = 1$ (6, 10 II)

(c) Ist $\mathcal{E}^* \cap \mathcal{E} = \{1\}$, so $G_{\mathcal{E}^*} = 1$ (7, 10 III)

(d) $\exists\ F_{\min} \trianglelefteq\trianglelefteq G$; $F = F'$ einfach. (b,c)

$N := \{F_i \mid F_i \trianglelefteq\trianglelefteq G,\ F_i \cong F\ \}$

$H := \mathcal{N}_G(N \cap A) \quad N \cap A > 1$ (11)

Dann $A, B \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}H$ (3), da $N \cap A = N\ \cap B_1$ nach (14).
Nach 3, 10 I ist $H = G$, $1 \neq N \cap A \in G_\mathcal{E}$, Wid.
Noch zu fragen:

(14) OAdSV: $A \in \mathcal{M}\mathcal{E}G$, $F = F'_{\text{einf}} \lhd\lhd G \rhd\rhd S$,
$F \not\leq S \Rightarrow A \cap F = (A \cap FS)S \cap F$
Bew: wie (12); oBdA S maximal; dann inv. bei $\mathcal{N}_B(F)$.

234/235

$\mathcal{M}^{\lhd\lhd}$

Verschärfg 28.5.75
→ Genau wie (13) beweist man: [*Bemerkung:* nochmal ausführlich aufschreiben!]

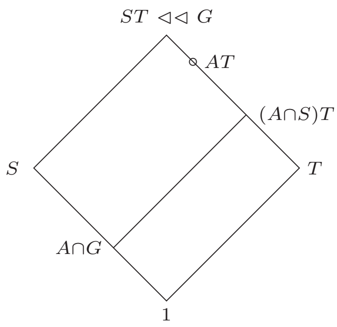
<u>Hauptsatz (13′)</u> UAdSV: Vor. $A \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathcal{E}G$, $B \in \mathcal{E}\pi(\mathcal{E})G$, B läßt die Projekt. von A in jeden nicht-aufl. Faktor einer B-inv. SNReihe von G fest.
[*Bemerkung:* $A \in \mathcal{H}_\pi(C)$ und sogar $C := \langle A, B\rangle$ $\mathcal{E}$-sep.]. Dann $B \underset{\langle A,B\rangle}{\leq} A$

Korollar (13″) ? $\mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathcal{E}G \subseteq \mathcal{L}\mathcal{E}G$ ($\mathcal{L}$ = "normaximal"). Jede submaximale $\mathcal{E}$-Untergr. von G ist groß in G; $A \in \mathcal{M}\mathcal{E}G$. $S \lhd\lhd G \Rightarrow A \cap S \in \mathcal{L}_\mathcal{E}S$.

[Randbemerkung: ∃ Umkehrung?! **???**]

Kor (13‴) $A \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathcal{E}G$, $S \times T \lhd\lhd G \Rightarrow A\cap(S\times T) = (\cap S)\times)A\cap T)$ od $A \in \mathcal{M}\mathcal{E}G$.

Bew. OBdA: $A \leq ST$



$A\cap S \lhd A$, $(A\cap S)T \lhd AT$, $(A\cap S)T\cap S \lhd AT \cap S$, $\mathcal{LES} \ni A\cap S \lhd AT\cap S \in \mathcal{E}$, $A \cap S = AR \cap S$, $(A\cap S)T = AT$, $(A \cap S)(A \cap T) = A \cap (A \cap S)T = A \cap AT = A$.

ERGZG XVI$_{81}$ Frage: Genügt in (13′) die Vorauss., daß B zu jedem Faktor G^λ einer beliebigen SNR von G, der nicht $\in \mathfrak{S}$ ist, eine Untergruppe H_λ von $G_{\lambda-1}$ mit $G_\lambda H_\lambda = G_\lambda(A \cap G_{\lambda-1})$ fest läßt?

Verm.: 13$^{\mathrm{IV}}$ $A \in \mathcal{MEG}$, $S, T \operatorname{sn} G$, $S \cos T$, $S \cap T\mathcal{E}$-separiert: $\Rightarrow A \cap ST = (A \cap S)(A \cap T)$.

FRAGE (15) Genügt statt Schreier “Die in G induzierte äußere Automorphismengruppe jedes einfachen Faktores von G hat $c_{\mathcal{E}} = 1$”? 244$_{38}$

FRAGE Umk (13″) „Kegel“ Folgt aus $S \leq G$ und $S \cap M \in \mathcal{LE}$S für jedes $M \in \mathcal{MEG}$, $\forall\mathcal{E}$, daß $S \lhd\lhd G$ ist?

235/236

$\mathcal{M}^{\lhd\lhd}$

20.11.77

(16) Bei abelschen Kompositionsfaktoren die äqu (“projekt.”) sind, kommt es vor, dass einer von einem $A \in \mathcal{M}\pi G$ gedeckt und der andere gemieden wird.
Bsp: $G = R \times S$, $R \cong S$ Ordnung $168 \cdot 2$

(17) $A, B \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathcal{E}G$, $P := G^{\mathfrak{S}}$, $A \cap P = B \cap P \Rightarrow A \underset{\langle A,B\rangle}{=} B$ (13)

(18) Stets braucht man nur die Kompositionsfaktoren zu berücksichtigen, in denen die Projektionen von A und B keine nilpotente Gr. erzeugen. Und statt Schreier wird es genügen, wenn jeder einfache Faktor von G nur “große” submaximale $\mathcal{E}$-Untergruppen hat. (= “subnormal-maximale”). Darin steckt der Satz von Hall.

FRAGE (18′) Wenn jede π-Untergr. nilpotent, gilt π-Sy Satz?

236/237

$\mathcal{M}^{\lhd\lhd}$

21.11.77

(19) Ist P ein einköpf. perfekter Subnormalteiler von G und Q der größte P nicht enthaltende SNT von G, so ist $\mathcal{N}_G(P) = \mathcal{N}_G(Q)$. Denn Q ist einhütig mit P als der Deckgruppe.

FRA: (20) Genügt es für Konjugiertheit zweier submax Ugr, wenn ihre Projektionen in die "Ein-Hüte" übereinstimmen?

Satz (21) Wenn G "ein-sockelig" ist, d.h. eine NR aufl.-halbeinfach-aufl. hat, und $A, B \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathcal{E}G$ dieselben Projektionen in die nicht abelschen Faktoren einer Komp-Reihe haben, so gilt desselbe für jede Komp-Reihe, also ist für jedes $S \in \operatorname{sn} G$ $A \cap S \underset{\langle\cdot\rangle}{=} B \cap S$.

237/238

$\mathcal{M}^{\lhd\lhd}$

(22) Ist (H, B) eine Einbettung für $(G, A \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathcal{E}G)$ mit minimalem $|H|$, so folgt aus $G \lhd H$ und $Z(G) = 1$ auch $\mathcal{C}_H(G) = 1$. Und auch bei $G \lhd\lhd H$ hat H einen perfekten Sockel, falls G einen solchen hat.

Aufgabe (23) π-Kompositionstürme abzählen, insb bei subnormaler Erzeugg von G, wie [62]

Satz (24) Eine $\mathcal{E}$-Untergr A von $G_1 \times G_2$ habe $A \cap G_1 \in \mathcal{L}_{\mathcal{E}}A$. Dann $A = (A \cap G_1) \times (A \cap G_2)$ die Projektionen sind überkreuz isomorph.
Folge: Sei A eine erblichgroße $\mathcal{E}$-Ugr von G, d.h:

Satz (25) Sei $A \in \mathcal{E}G$, es gebe eine KR $\{G_\lambda\}$ von G, für welche alle $A \neg G^\lambda \in \mathcal{L}\mathcal{E}G^\lambda$ sind. Dann gilt das gleiche für jede KR von G und: Aus $S, T \operatorname{sn} G$ folgt $A \cap \langle S, T\rangle = \langle A \cap S, A \cap T\rangle$

Frage (und entsprechend für subnormale Ausschnitte?)
$\rightarrow$ 248

238/239

$\mathcal{M}^{\lhd\lhd}$

Satz (26) $A \in \mathcal{E}G$, F ein "perfekter Einkopf" von G, $A \neg F \in \mathcal{L}\mathcal{E}F \Rightarrow$ Man kann von
$\rightarrow$ XVI 85 der Projektion von A in den abstrakten Kompfaktor von G reden, der von E gedeckt wird. Aber Vorsicht: $A \neg F$ braucht für $A \in \mathcal{M}\mathcal{E}G$ nicht $\in \mathcal{L}\mathcal{E}F$ zu sein, z.B. $A_5 \wr A_5 = G$, $p := \{2, 5\}$

Satz (27) Sei $T \leq A \in \mathcal{E}G$ und T invariant * in A und $T \in \mathcal{L}\mathcal{E}G$. Dann $A \in \mathcal{L}\mathcal{E}G$, z.B: T ein π-(Normalisator)turm, wo $\pi = \{p \mid \exists E \in \mathcal{E},\ p \mid |E|\} := \pi(\mathcal{E})$. Also:

(28) Jede $\mathcal{E}$-Obergruppe A eines $\pi(\mathcal{E})$-Normalisator-Kompositionsturm von G ist $\in \mathcal{L}^{\neg}\pi G$, d.h. erblich groß, und hat daher die Projektions-Eig:

FRAGE (28′) d.h. wohl: $A\neg S_1\neg S_2$ ist assoz., wenn S_i Subnormalfaktoren von G

$*$ es genügt: π-G-intravariant in A; dh. die von π-Elementen von G induzierten Autom von A wirken auf T wie innere Autom von A.

239/240

$\mathcal{M}^{\lhd\lhd}$

Bemerkg: (29) Ist eine Klasse von endlichen Gruppen abgeschl. gegen Untergr. und semidirekte Produkte, so auch gegen Erweiterungen.
Bew: $N \trianglelefteq G \Rightarrow G \underset{\sim}{\leq} N \wr G/N$ monomiale Darst.

Ist noch $\mathcal{E} = {}_Q\mathcal{E}$, so erfüllt $\mathcal{E}$ die Vorauss. meiner Theorie, was auch weiter stets vorausg. wird, "$\mathcal{E}$ gut"

Satz (30) Zu jedem guten $\mathcal{E}$ gibt es maximale $\mathcal{E}$-Untergr. von G, die erblich groß sind; desgl. maximale auflösbare... (28).

(31) Subnormalquotienten
$Q_{\lhd\lhd}(G) = \{S : T \mid T \lhd\lhd S \lhd\lhd G\}$ sind wahrscheinlich neben den Faktoren $\mathcal{F}(G) = \{X/Y \mid Y \trianglelefteq X \leq G\}$ die wichtigste Art von Quotienten in G. Sie haben wohl eine genügend reiche "Struktur" für nützliche Homomorphiesätze. Deren Erweiterung auf $|G| = \infty$ gibt vielleicht Hinweise auf die "richtige" Verallgemeinerung der Subnormalität. $\rightarrow 248_{51}$

240/241

$\mathcal{M}^{\lhd\lhd}$

22.11.77

(32) Krit für $\lhd\lhd$ Sei $A \leq G$ und $G\backslash A$ "mit Schichten $X\backslash Y$ überdeckbar". Zu jedem $x \in G - A$ gebe es X, Y mit $A \leq Y \trianglelefteq X \leq G$ mit $x \in X\backslash Y$. Dann ist $A \operatorname{sn} G$.
Bew: Min Gegenb G: $A \leq M \underset{\text{eind}}{\lessdot} G$ wähle $x \in \bigcap_{g\in G}(G - M^g)$.

Achtung: Die Vor. sagt nur: $x \in A^{\langle x\rangle} \Rightarrow x \in A$.

Satz (33) A_5 als Kompf. Jeder perfekte Kompfaktor von G sei $\cong A_5$. Sei $\pi \cap \{2,3,5\} = \{2,3\}$ oder $\{2,5\}$ oder $\{2\}$. Seien A, B zwei auch "sub-" maximale π-Untergr. von G und $A_2, B_2 \in$ 2-Syl A, B. Dann $A \underset{G}{=} B \Leftrightarrow A_2 \underset{G}{=} B_2$ [1)]

Bew: OBdA $A_2 = B_2$, also $A \cap N_1 = B \cap N_1$ wenn $N_1 \cdot \lhd\lhd G$.Zwei große π-Ugr von A_5 mit gemeinsamer 2-Sylowgr. oder [gemeinsamer] 5-Sylowgr von G konj. (nämlich entw. $\cong S_3$ oder $\cong A_4$). Daher $N \cdot\!\lhd G \Rightarrow N \cap A = N \cap B$.

F (34) Gilt ähnliches für alle min. nicht-aufl. Komp-Faktoren? Breuninger

[1)] Es gibt z.B. bis auf Konjugiertheit nur je eine max π-Untergr, die eine 2-Syl-Gr. enthält; sie enthält jeden $\{2, \pi'\}$ Turm wenn $\pi' := \pi - \{2\}$ in beliebiger Anordnung.

241/242

$$\mathcal{M}^{\lhd\lhd}$$

23.11.77

(33′) Ist jeder nichtabesche Kompfakt. von $G \cong A_5$ und ist $G_2 \in$ 2-Syl G, $G_2 \leq A, B \in \mathcal{M}\pi(G)$, $2 \in \pi \not\ni 3$ oder 5, so $A \underset{\mathcal{N}(G_2)}{=} B$. (33)

Bsp. (35) Es kommt vor, dass zwei maximale $\mathcal{E}$-Untergruppen A, B von G nicht konjugiert sind und doch auf jeden "Einkopf" dieselbe Projektion haben. Man kann zusätzlich z.B. ereichen, dass alle Komp-fakt von $G \cong A_6$ sind und alle Komp-fakt von $A \cong A_5$. Bew mit

Satz (36) Sei K eine Gruppe, die zwei nicht isomorphe max. $\mathcal{E}$-Untergr. X, Y enthält. Sei H eine beliebige (endl.) Gruppe, $|H| = n$. Dann enthält das reguläre Kranzprodukt $G := K \wr H = \underbrace{(K \times \cdots \times K)}_{n} H$ zu $\underline{\text{jedem } E \in \mathcal{E}(H)}$ ein

$M \in \mathcal{M}\mathcal{E}G$

242/243

$$\mathcal{M}^{\lhd\lhd}$$

derart, dass $M \cap (K \times \cdots \times K) = (\underbrace{X \times \cdots \times X}_{n_0}) \times (\underbrace{Y \times \cdots \times Y}_{n-n_0}) =: D$ und $MK = E$ ist, also $M\neg GK = E$, *[durchgestrichen* d.h. man kann zu $H_0 \leq H$ stets ein G und $\varphi \in \operatorname{Epi}(G, H)$ derart angeben, dass jedes $E \in \mathcal{E}_0 H$ ein φ-Original in $\mathcal{M}\mathcal{E}G$ hat, und dass alle diese Originale den gleichen Schnitt mit dem Kern haben: Bew: $M := DL$. *]*. Kurz: $\forall H \exists G, K :\ K \trianglelefteq G$, K splits G, $\mathcal{M}\mathcal{E}G\neg H := G/K = \mathcal{E}H$.

Bew. 35: $K := A_6$ enthält zwei nicht konj. Kopien X, Y von A_5. Für H wähle $K \times K$, für H_0 die "Diagonale", für $\begin{cases} M_1 \text{ das Bild von } X \text{ in } H_0, \\ M_2 \quad \text{“} \quad \text{“} \quad \text{“} \qquad Y \quad H_0, \end{cases}$

$\mathcal{E} := \{C_2, C_3, A_5\}$. Dann $A := L_1$, $B := L_2$.

Bsp. (37) Es kann $\mathcal{M}\pi G \in \mathfrak{N}$ sein und doch $c_\pi(G) > 1$. G einfach, $|G| = 168$ oder
$\mathcal{M}\pi G \cap \mathfrak{N}$ $G = A_7$ $\}$ $\pi := \{2, 7\}$. Hier ist $\mathcal{M}\pi G =$ 2-Syl $G \cup$ 7-Syl G.

243/244

38 Für die Untersuchung eines $A \in \pi G$ wird es genügen vorauszusetzen: Läßt
Statt Schreier A einen einfachen Faktor von G fest, dessen Ordnung einen π-Teil hat, so läßt A eine π-Untergruppe $\neq 1$ fest. (Kurz: A wirkt in G auf Schreiersche Art).

Lit: 39 Sind nicht die maximalen auflösbaren Untergruppen von GL_n schon von Jordan bestimmt worden?

Aufg 40 Alles innerhalb der Menge der Faktoren von G machen, statt für abstrakten $\mathcal{E}$. Schwierigkeiten werden bei $\mathcal{M}^{\lhd\lhd}$ entstehen.

Bsp 41 Sei $|G| = 168$ einfach: $A \in$ 2-Syl $G \Rightarrow \exists H\ A \underset{3}{<} H \underset{7}{<} G$. Dann $A \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}\{2,3\}G$, aber $A \notin \mathcal{M}^{\lhd\lhd}\{2,3\}H$. (wenn $H \lhd\lhd G$ gilt, kann sowas nicht passieren!) (Allg.: $G \in \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathcal{E}G = \{G\}$).

244/245

$\mathcal{M}^{\lhd\lhd}$

Bsp 41′ Für $|A| = 2$, $A \leq A_4 = G \leq A_5 = H$ gibt es $M \in \mathcal{M}\{2,3\}H$ mit $A = H \cap M$. Es hat also keinen Zweck, die Bedingg. $G \trianglelefteq\trianglelefteq H$ in 230 (1) weggelassen.

FRAGE 42 Für ein $A \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathcal{E}G$ seien die Projektionen in jeden Kompfaktor von G intravariant. Ist dann A intrav in G?

Def 43 $N \,\textcircled{$\blacktriangleleft$}\, G$ "super-charakteristisch" $\Leftrightarrow N \leq G$, und $G \lhd\lhd H \ \Rightarrow N^H \cap G = N$.

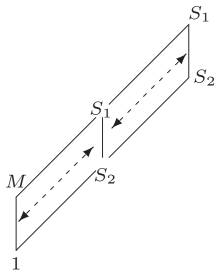
44 (a) $N \,\textcircled{$\blacktriangleleft$}\, G \Rightarrow N \blacktriangleleft G$ (charakt.)

(b) $A \,\textcircled{$\blacktriangleleft$}\, B \,\textcircled{$\blacktriangleleft$}\, C \Rightarrow A \,\textcircled{$\blacktriangleleft$}\, C$.

45 $= 231_6$: $\varphi \in \operatorname{Hom} G$, $\mathcal{E} \ni \ker\varphi \,\textcircled{$\blacktriangleleft$}\, G \Rightarrow (\mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathcal{E}G)^{\varphi} \leq \mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathcal{E}G^{\varphi}$. Dann müßte KonjSatz für $\mathcal{M}\mathcal{E}G$ gelten $\forall\mathcal{E}$?!

[*Randbemerkung:* Ergzg ?! 4.1.80 $\downarrow$]

Satz 46 $\mathcal{E}$ beliebige Menge einfacher Gruppen, $A \in \mathcal{M}\mathcal{E}G$, $N_1 = N_1'$ einfach $\operatorname{sn} G$, $F = \overline{S_1/S_2}$ beliebiger von N_1 gedeckter SNFaktor von G. Dann $A \cap N_1 = (A \neg F) \neg N_1$. Bew: $A \cap N_1$, $A \neg F$, $A \neg S_1^{\max}/S_2^{\max}$ sind $\mathcal{E}$-Gruppen. $A \cap N_1$ ist die maximale von A_1 normalisierte $\mathcal{E}$-Untergr von N_1.



Folgt: $A \neg F = B \neg F \Rightarrow$
$A \cap N_1 = B \cap N_1 \Rightarrow A \cap N = B \cap N$

245/246

$\mathcal{M}^{\lhd\lhd}$

26.11.77

Satz: 46 überholt → 48 Sei $A \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathcal{E}G$, $\mathcal{E}' \cap \mathcal{E} = 1$, $N := G_{\mathcal{E}'}$, $\overline{G} := G/N$. Dann $\overline{A} \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathcal{E}\overline{G}$ $(= 232_7)$.
Bew: nach Def 230 (1) $\exists H, B$: $G \lhd\lhd H$, $B \in \mathcal{M}\mathcal{E}H$, $G \cap B = A$. Bilde $M := H_{\mathcal{E}'}$. Dann $N = G \cap M$, also $G/N \cong GM/M$. Da $BM/M \in \mathcal{M}\mathcal{E}H/M$, genügt es zu zeigen: $\circledast$ $K := GM \cap BM = AM$.
$*$ s.u. *Verweis auf Randnotiz*
[*durchgestrichen bis Anfang der Randnotiz:*
Wegen $K/M \in \mathcal{E}$, $M \in \mathcal{E}'$ ist M ein Hallscher Normalteiler von K. Wegen $M \leq K \leq GM$ deckt G ganz K/M, wegen
$M \leq K \leq BM$ deckt B ganz 〃
Also enthält $G_1 := G \cap K$ ein Komplement C zu M in K, und ebenso enthält B ein Kplt $D = M \cap GM$ zu M in K. Nach Schur-Zass ist $C \underset{\langle C,D\rangle}{=} D$, also $D \leq C^{\cdot\cdot K}$.

Nun ist aber $C \leq G_1 = G \cap K \lhd\lhd H \cap K = K$, also $C^{\cdot\cdot K} \leq G_1$, $D \leq G_1 \leq G$, und daher $D \leq G \cap B = A$, also $K = MD = MA$: $\circledast$.]

$*$ Das folgt viel leichter mit 248_{53} oder ganz kurz so:

Randnotiz
Beweis ganz kurz: $B \cap GM \in \pi \Rightarrow \leq G$, da $G \operatorname{sn} GM$,
$|GM : G|_\pi = 1 \Rightarrow \leq A \Rightarrow = A$, $BM \cap GM = (B \cap GM)M = AM$.
2.6.79

246/247

$\mathcal{M}^{\lhd\lhd}$, Schnitt-Distrib

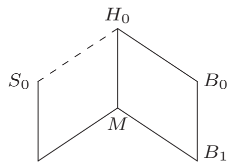
27.11.77 HiS 47 (Distributivitätssatz) $S \lhd\lhd H$. $B \in \pi H$, $M \trianglelefteq H$, $B \cap M \in \underbrace{\pi\text{-Hall } M}_{\text{abschwächbar?}} \Rightarrow$

a) $B \cap SM = (B \cap S)(B \cap M)$
b) $BM \cap SM = (B \cap S)M$
$\rightarrow 248_{53}$, 249_4 $XVI_{84(4)}$

Bew.

a) $M \le H_0 := SM \cap BM = S_0M = B_0M$
viel kürzer: 248 53!
mit $S_0 := S \cap H_0$, $B_0 := B \cap H_0$. Es ist $\otimes$ $B_0 \in \pi$-Hall H_0, da für $B_1 := B_0 \cap M$:

$$\begin{aligned}|B_0| &= |B_0 : B_1||B_1| = |H_0 : M||B_1|\\ &= |H_0 : M|_\pi |M|_\pi = |H_0|_\pi\end{aligned}$$



Ferner ist $S_0 \lhd\lhd H_0$, also $B_0 \cap S_0 \in \pi$-Hall S_0. Wegen $\otimes$ & $H_0 = S_0M$ ist $B_0 = (B_0 \cap S_0 = (B_0 \cap M)$.
Es ist

$$\begin{aligned}B_0 \cap S_0 &= B \cap H_0 \cap S = B \cap S,\\ B_0 \cap M &= B \cap H_0 \cap M = B \cap M\end{aligned}$$

wegen $B \cap S \le H_0$, $B \cap M \le M \le$ **???**.
Also $B \cap SM = B \cap BM \cap SM = B \cap H_0 = (B \cap S)(B \cap M)$.

b) $BM \cap SM = (B \cap S)(B \cap M)M = (B \cap S)M$.

Redukt. auf Faktorgruppen

48 ($A \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathcal{E}G$, $\varphi \in \operatorname{Hom} G$, $\ker\varphi = N \mathbin{\blacktriangleleft} G$ $\mathcal{E}$-separiert) [d.h. Schichten $\in \mathcal{E}$ od π'] $\Rightarrow \varphi(A) \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathcal{E}\varphi(G)$.
Bew: H, B wie in 230_1; $M := N^H$. $M \cap G \stackrel{?}{=} N$. $\pi := \pi(B)$, N und damit wegen $N \lhd\lhd H$ auch M ist $\underset{\pi}{\mathcal{E}}$-separiert, und $M \cap B \in \pi$-Hall M. (als HiS formulieren).
Nach 47 ist $GM \cap BM = AM$, also $AM/M \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathcal{E}GM/M$, aber dies $\cong \overline{G} = G/N$.

247/248

$\mathcal{M}^{\lhd\lhd}$, Distributivitätsformeln

49 G $\mathcal{E}$-separiert $\Rightarrow m^{\lhd\lhd}G = 1$

50 $A \in \mathcal{M}\mathcal{E}G$, $S := \bigtimes S_i \lhd\lhd G \Rightarrow A \cap S = \bigtimes (A \cap S_i)$

Projektion Unterverbände von sn G

51 Sei $\pi \subseteq \mathbb{P}$, $H \le G$. Dann bilden diejenigen $A \in \operatorname{sn} G$, für welche $A \cap H \in \mathcal{L}^*\pi A$ ist, einen Verband ($\mathcal{L}^*$:= erblich groß: $H \neg A^\nu \in \mathcal{L}A^\nu$ für jeden Kompositionsfaktor A^ν von A).

51′ $S, T \lhd\lhd G \geq B$, $B\neg(S : S \cap D)$, $S \cap T =: D$, $\ldots (T : \quad) \in \mathcal{L}^*\pi \Rightarrow$
$B = \langle S, T\rangle : D \in \mathcal{L}^*\pi$

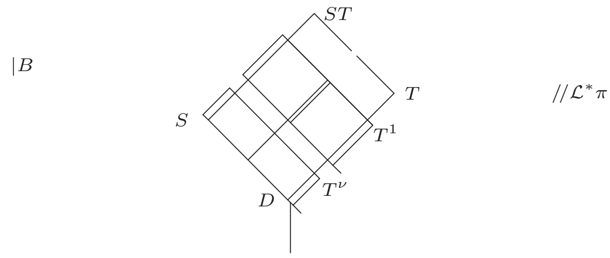
FRAGE 51″ Wie sehen die größten “Subnormalquotienten” Q von G aus, für die $H\neg Q^\nu \in \mathcal{L}\pi Q^\nu$ ist? Sind es Faktoren? $\rightarrow 238_{24}$, 240_{31}

Distr. 52 a) $B \in \mathcal{E}G$, $T \lhd\lhd G$, B erblich groß auf $T \Rightarrow B$ erbl. groß in $\langle T, B\rangle$

b) $B \in \mathcal{E}G$, $S, T \lhd\lhd G$; $ST = TS$, B erblich groß auf $T \Rightarrow B \cap ST = \langle B \cap S, B \cap T\rangle$ 51

Dazu 247_{27}

Distr. Satz 53 $S, T \lhd\lhd G$, $B \in \pi G$, $ST = TS$,
$B\neg(T : (S \cap T)) \in \mathcal{L}^*\pi T : (S \cap T) \Rightarrow B \cap ST = (B \cap S)(B \cap T)$



Bew: $|B \cap ST| = |B \cap ST : S||B \cap S| = \prod |B\neg T^i||B \cap S| =$
$|B \cap T||B \cap S| = |(B \cap S)(B \cap T)|$ **???**

248/249

Vermutungen über $\mathcal{M}^{\lhd\lhd} G := \mathcal{M}^{\lhd\lhd} \mathcal{E}G$

28.11.77

1 Wichtig sind die $\wp$-Füße und $\wp$-Hufe von G: = minimale $\wp$erfekte Normalteiler (SubNT). Zu geg. $A \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd} G$ bilde man die Klassen A-äquivalenter $\wp$-Hufe ($A \cap H_1$ isotop zu $A \cap H_2$) und den gemeinsamen Normalisator G^* aller A-Äquivalenzklassen. Haben zwei submax $\mathcal{E}$-Ugr eines $\wp$-Hufs dieselbe Projektion in den Kopf, so sind sie isotop. Setze $\wp\text{-soc}\, G := \prod \wp$-Füße. Dann folgt aus $\wp\text{-soc}\, G \leq H \leq G$: $\wp\text{-soc}\, G = \wp\text{-soc}\, H$.
$G \trianglerighteq C_G(\wp\text{-soc}\, G/(\wp\text{-soc}\, G)_{\mathfrak{S}}) \in \mathfrak{S}$.

2 $N \trianglelefteq G$, $\overline{G} = \{$ durch G induz. Autom. von $N\}$,
$\mathcal{M}_G^{\lhd\lhd} N := (N \cap A / A \in \mathcal{M}G)$, $\Rightarrow \overline{\mathcal{M}_G^{\lhd\lhd} N} = \mathcal{M}_{\overline{G}}^{\lhd\lhd} \overline{N}$.

3 $A \in \mathcal{M}\mathcal{E}G$, $S, T \lhd\lhd G$, $ST = TS$, $S \cap T$ $\mathcal{E}$-separiert $\Rightarrow$
$A \cap ST = (A \cap S)(A \cap T)$

4 In Distr-Satz 247_{47} 248_{53} od ähnl. genügt $B \cap M$ erblich große $\mathcal{E}$-Ugr von M statt $B \cap M \in \pi$-Hall M (falls $M \lhd H$).

Verweis auf vorherige Seite:
53 + 51′ deuten darauf hin, dass es Zweck hat, "lineare" Funktoren zu betrachten: $A, B \lhd\lhd G$, $AB = BA \Rightarrow (AB)^\varphi \subset A^\varphi B^\varphi$

249/250

$$\mathcal{M}^{\lhd\lhd} = \mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathcal{E}$$

TRUGSCHLUSS 29.11.77

1 f Sei $N := G_\mathcal{E}$. Dann $A \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathcal{E}G \Leftrightarrow N \leq A$, $A/N \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathcal{E}G/N$. $\Rightarrow$: (246_48) schon $231_{6'}$. $\Leftarrow$ falsch 251; Sei $G/N = \overline{G}$, $\varphi : G \to \overline{G}$. $\exists \overline{H}$, $\overline{B}$: $\overline{G} \lhd\lhd \overline{H}$, $\overline{B} \in \mathcal{M}\mathcal{E}\overline{G}$, $\overline{A} = \overline{G} \cap \overline{B}$ und oBdA $\overline{H}_\mathcal{E} = 1$ (sonst $\overline{H} \to \overline{H}/\overline{H}_\mathcal{E}$).

Stelle $\overline{H}$ durch seine reguläre PGr dar. Dann $\overline{G} \leq \overline{H}$ als $i$fach wiederholte reguläre Darstellung von $\overline{G}$, $i := |\overline{H} : \overline{G}|$. Bilde $K := N \wr \overline{H}$, $C := N \wr \overline{B}$.

Eine Kopie von G liegt in K (vermöge der mon. Darst. von G nach N), dabei ist und der natürliche Hom. $\psi : K \to \overline{H} \cong K/K_\mathcal{E}$ stimmt auf G mit dem alten φ überein.

Es ist $K_\mathcal{E} = N \wr 1$ wegen $\overline{H}_\mathcal{E} = 1, C \in \mathcal{M}\mathcal{E}K$ wegen $\psi(C) = \overline{B} \in \mathcal{M}\mathcal{E}\psi(K)$, $C \cap G = \{g \in G \mid \varphi(g) \in \overline{B}\} = A$. Aber $G \notin \operatorname{sn} K$!

2 Vielleicht gehts aber bei zentralem N?

250/251

[Randbemerkung: Gegenbsp zu 250_1 *]*

3 Aus $A \in \mathcal{E}G$, $A/G_\mathcal{E} \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd} G/G_\mathcal{E}$ folgt <u>nicht</u> $A \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathcal{E}G$. $\to$ 252

Bsp: $G := S_5 \wr P$, wo $P \leq S_7$, $|P| = 168$. G ist vollständig wegen $\mathcal{N}_{S_7}P = P$ (Bew: $|S_7 : P| = 30$), $\pi := \{2, 3, 5\}$ gibt $G_\pi = (S_5)^7$. $\exists$ submax Ugr der Ord 8 in P.

Wähle A: $S_5^7 \underset{8}{<} A \underset{21}{<} G$. Wäre $G \lhd\lhd H$, $B \in \mathcal{M}\pi H$, $A = G \cap B$, so wäre die Projektion von B in $GH_\mathcal{E}/H_\mathcal{E}$ eine maximale unter $\mathcal{N}_B(GH_\mathcal{E}) = \mathcal{N}_B(G)$ invariante $\{2, 3, 5\}$-Untergruppe, deren Ordnung durch 8 teilbar ist. Da aber G vollständig, erleidet G unter einem Normalisator nur innere Automorphismen und diese lassen wenn eine Ugr der Ord 8, sogar eine der Ord 24 fest. Also $|B \neg GH_\mathcal{E}/H_\mathcal{E}| = 24$, $|B \neg (G/S_5^7)| = 24$, $B \cap G \neq A$.

Einfacher: Statt S_5 kann man auch S_3 nehmen, $\pi = \{2, 3\}$.

Behebung: Behebung des Gegenbeispiels durch Vergrößerung von $G^{\lhd\lhd}$, 252.

251/252

$\mathcal{M}^\frown\mathcal{E}$ in Pro-submaximale Untergruppen

1.12.77

[Definition 0 im folgenden durchgestrichen:]

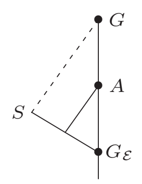
Def 0: $A \in \mathcal{M}'\mathcal{E}G :\Leftrightarrow \exists Y \lhd X \lhd\lhd H \geq C$: und $\exists B : Y \leq B \leq X$ und $\exists \sigma \in \mathrm{Iso}(G, X/Y) : \sigma(A) = B/Y$, $B = X \cap C$, $C \in \mathcal{M}\mathcal{E}H$ (also $Y \in \mathcal{E} \cap \mathrm{sn}\, H$).

Es handelt sich also um die Projektionen maximaler $\mathcal{E}$-Untergruppen in Subnormalfaktoren mit Nenner $\in \mathcal{E}$.
Da (4) wohl nicht gilt, ist das weniger empfehlenswert.

Def. 1 Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ die Klasse der $\mathcal{E}$-separierten Gruppen $A \in \overbrace{\mathcal{M}^\frown\mathcal{E}}^{\text{kurz } \mathcal{M}^\frown}\ G$
$:\Leftrightarrow \begin{cases} A \cap G_{(\mathcal{E},\mathcal{E}')} \in \pi\text{-Hall } G_{(\mathcal{E},\mathcal{E}')} \\ A/G_{\mathcal{E},\mathcal{E}'} \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd} G/G_{(\mathcal{E},\mathcal{E}')} \end{cases}$.

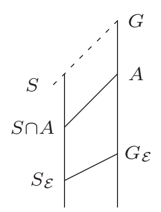
Das sind die A, die eine π-Hallgruppe von $G_\mathcal{E}$ enthalten und bei Proj. auf $G/G_{(\mathcal{E},\mathcal{E}')}$ submaximal werden. UAdSV

Sätze: 2 $A \in \mathcal{M}^\frown\mathcal{E}G$, $G_\mathcal{E} \leq S \lhd\lhd G \Rightarrow A \cap S \in \mathcal{M}^\frown\mathcal{E}S$



Bew: $A \cap S/G_\mathcal{E} \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd} S/G_\mathcal{E}$ da $= A/G_\mathcal{E} \cap S/G_\mathcal{E}$.

Durchschnitte 3 $A \in \mathcal{M}^\frown G$, $S \lhd\lhd G \Rightarrow S \cap A \in \mathcal{M}^\frown S$.

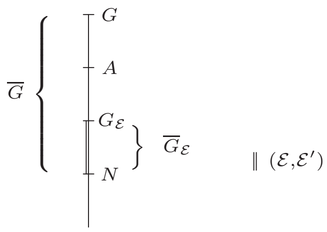


Bew: $S/S_\mathcal{E} \cong SG_\mathcal{E}/G_\mathcal{E}$, dabei $S \cap A/S_\mathcal{E} \cong (S \cap A)G_\mathcal{E}/G_\mathcal{E} = SG_\mathcal{E}/G_\mathcal{E} \cap A/G_\mathcal{E} \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd} SG_\mathcal{E}/G_\mathcal{E}$.

252/253

Der Vorteil von $\mathcal{M}^\frown$ gegenüber $\mathcal{M}'$, $\mathcal{M}^{\lhd\lhd}$ besteht in 4+4':

4 Sei $\mathcal{E} \ni N \lhd G$. Dann $A \in \mathcal{M}\hat{\ } G \Leftrightarrow N \leq A$, $A/N \in \mathcal{M}\hat{\ } G/N$
[Lohnt das die komplizierte Definition? Abwarten ob es nützt für $\mathcal{M}\pi G$!
2.6.79]
Bew:



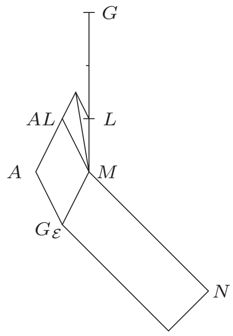
$\overline{G} := G/N$, $\overline{G}_{(\mathcal{E},\mathcal{E}')} = \overline{G_{(\mathcal{E},\mathcal{E})}}$.

Kor.:

Homom.: 4′ $A \in \mathcal{M}\hat{\ } G$, $\varphi : G \twoheadrightarrow \overline{G}$, $\ker \varphi \in (\mathcal{E}, \mathcal{E}') \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{M}\hat{\ } \overline{G}$.

[Unterpunkt 5 durchgestrichen:]

5 $A \in \mathcal{M}\hat{\ } G$, $\psi : G \twoheadrightarrow \overline{G}$, $\ker \psi \in \mathcal{E}'$ ($\mathcal{E}$-fremd) $\Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{M}\hat{\ } \overline{G}$.



[Unterpunkt 6 durchgestrichen:]

6 $A \in \mathcal{M}\hat{\ } G$, $\chi : G \twoheadrightarrow \overline{G}$, $\ker \chi$ $\mathcal{E}$-separiert $\Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{M}\hat{\ } \overline{G}$. Bew 4′, 5 oder wohl direkt, wie 5.

253/254

Noch $\mathcal{M}\hat{\ }$

Konjug. 7 $A \in \mathcal{M}\hat{\ } \mathcal{E}G$, $B \in \mathcal{E}G$. Lasse die Projektionen von A auf die nicht $(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$-Faktoren einer B-invarianten Subnormalreihe von G fest. Dann $B \underset{\langle A,B\rangle}{\leq} A$.

[7′ $\mathcal{M}\hat{}\,(G_1 \times G_2) = \mathcal{M}\hat{}\,(G_1) \times \mathcal{M}\hat{}\,(G_2)$ 3.6.79]

Bew: $G \to \overline{G} := G/G_{(\mathcal{E},\mathcal{E}')}$, $\overline{B}$ läßt die Proj von A in die nicht aufl Faktoren der $\overline{B}$-inv. SNR $\{\overline{G}_\lambda\}$ fest. $\overline{A} \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}\overline{G}$. $235_{(13')}$: $\overline{B} \underset{\langle \overline{A},\overline{B}\rangle}{\leq} \overline{A}$.

Also $BG_{(\mathcal{E},\mathcal{E}')} \underset{\langle A,B,G_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}\rangle}{\leq} AG_{(\mathcal{E},\mathcal{E}')}$. Daher $B \underset{\langle A,B\rangle}{\leq} AG_{(\mathcal{E},\mathcal{E}')}$.

$\mathcal{M}\hat{}\subseteq \mathcal{L}$ 8 $A \in \mathcal{M}\hat{}\,\mathcal{E}G \Rightarrow A \in \mathcal{L}\mathcal{E}G$.

Bew: $A \trianglelefteq B \in \mathcal{E}G \Rightarrow B$ läßt Proj A in Hauptf fest $\Rightarrow$
$B \underset{\langle A,B\rangle}{\leq} A \Rightarrow |B| = |A|$, $B = A$.

9 Def 1 legt nahe, statt der max $\mathcal{E}$-Untergr die max $(\mathcal{E},\mathcal{E}')$-Untergr zu betrachten. Jede letztere enthält bis auf Konj. nur eine max. $\mathcal{E}$-Untergruppe,

254/255

$$\mathcal{M}\hat{}\,\mathcal{E}G,\ \mathcal{L}^{\neg}\mathcal{E}G$$

aber die Umkehrung gilt nicht; z.B. ist in A_5 jede max. 3-Untergr. in 2 nicht konjugierten max. $(3,3')$-Untergruppen enthalten (sie haben die Ordnungen $6, 12$). Es ist also $m_\pi(G) \leq m_{\pi\pi'}(G)$, und mitunter $<$.

10 Setzt man $(\mathcal{E},\mathcal{E}') =: \mathcal{F}$, so ist $F' = 0$; hierfür sollten besonders einfache Regeln gelten. $\mathcal{F}' = 0$ heißt: $\forall C_p \in F : \mathfrak{S} \subseteq F$;

11 dann $A \in \mathcal{L}\mathcal{F}G \Rightarrow \mathcal{N}_G(A) = A$.

12 Ansatz zur Entkopplung bei der Bestimmung von $\mathcal{M}\mathcal{E}G$ mit perfektem Sockel: Monomiale Darstellung von G mit Koeff aus $\mathrm{Aut}_G\, E_1$,
$E_1 = E_1' \lhd\lhd G$.

13 $\overbrace{\mathcal{L}^{\neg}\mathcal{E}G}^{\text{erblich große } \mathcal{E}\text{-Untergr von } G}$ kann vielleicht besser von oben bestimmt werden, erst in G/N, <u>dann</u> in $N_{\lhd\,\min} \lhd G$.

255/256

14 Zwecks 13 Projektion in Quotienten betrachten. Es gilt mindestens:

$$|A \neg X : Y| = |A \cap X : A \cap Y|,$$

also bei $G = G_0 \geq G_1 \geq G_2 \geq \cdots \geq G_l = 1$ und $G^\lambda := G_{\lambda-1} : G_\lambda$:

$$|A| = \prod_\pi |A \neg G^\lambda|$$

(Es gilt i.a. nicht $|A \neg G^\lambda| \mid |G^\lambda|$, z.B. $G^\lambda = A_5 : A_4$, $|A| = 3$, insbesondere $A \in \pi G \Leftrightarrow$ alle $|A \neg G^\lambda| \in \pi$).

FRAGE 15 Kann man "große π-Projektionen" definieren?

HiS 16 Wirkt die π-Gruppe A automorph auf eine auflösbare Gruppe, so läßt sie eine π-Hallgruppe fest.

FR. 17
a) Kann man sich bei $\mathcal{M}\pi G$ auf irgendwie zufallende Gruppen beschränken?
b) Welche maximalen Ugr von max. π-Gruppen haben die Konjugiertheits-Eigenschaft $\sim 257_1$?
c) Welche Ugr'en überhaupt haben sie?

256/257

Vermutg 1 $A, B \in \mathcal{L}^{\neg}\mathcal{E}G$, $A\neg G^{\lambda} = B\neg G^{\lambda}$ $\exists\{G_\mu\} \leq \mathrm{NR}G \Rightarrow A \underset{\langle A,B\rangle}{=} B$.

[Bemerkung:] Fraglich: Vererbung auf $\mathcal{N}_G(A\cap N_{\min})$, falls A nicht erblich intravariant. Aufgabe 254_7: Gemeinsamer Obersatz mit $\mathcal{M}\hat{\ }\mathcal{E}G$?

Verm. 1′ $A \in \mathcal{L}^{\neg}\mathcal{E}G$, $B \in \mathcal{E}G$, B läßt die Proj. von A in die nicht aufl. G^{μ} fest $\Rightarrow B \underset{\langle A,B\rangle}{\leq} A$.

2 $\underline{\pi\text{-Intravarianz}}$ von A in G heißt wohl: $\mathcal{N}_{\mathrm{Aut}\,G}(A)$ deckt $\langle\pi(\mathrm{Out}\ G)\rangle$.

3 Allgemeines zur Projektion $\mathrm{sn}\,G \to \mathrm{sn}\,A$ wo $A \leq G$:

Aus $\begin{cases} A, B \in \mathrm{sn}\,G \\ A \leq \mathcal{N}B \end{cases}$ folgt $A \cap H \leq \mathcal{N}B \cap H$.

Folge: Aus $AB = BA$ folgt $(A\cap H)(B\cap H) = (B\cap H)(A\cap H)$ wenn für H die Proj.-Eigenschaft gilt. Die Umkehrung wird gelten z.B. für Sylow-Türme.

4 Sei $\pi = \{2,3\}$, jeder nichtabelsche Komp.Faktor von G sei $\cong A_5$. Dann sind wohl je zwei A_4-freie Untergruppen X, Y von G vereinbar, d.h. $\exists g \in G:\ \langle X^g, Y\rangle \in \pi G$.

257/258

1 Ist $A \in \mathcal{M}\mathcal{E}G$ oder $\mathcal{M}^{\lhd\lhd}$ und $\{G_\lambda\}\mathrm{SNR}G$, $A_\lambda := A \cap G_\lambda$ und $N_\lambda := \mathcal{N}_{G_\lambda}(A_\lambda)$, so ist $N_\lambda/A_\lambda \in \mathcal{E}'$ und $N_\lambda \lhd N_{\lambda-1}$, da $A_\lambda \lhd N_{\lambda-1}$.

Kann man durch Zusammenbauen $H := N_1N_2\dots N_l$ die größte $\mathcal{E}$-separierte Untergruppe von G erhalten, in der A eine $\lhd\lhd$-maximale $\mathcal{E}$-Untergr. ist?

Monomial 2 Monomiale Darstellungen einer p-Gruppe P mit Diagonalprodukt 1 haben vielleicht was mit $J(P)$ zu tun.

ℓsnℓ 3 Vermutung: $A\ \ell\mathrm{sn}\ell\ G \Leftrightarrow \forall a_1, \dots, a_k \in A\ \forall g_1, \dots, g_l \in G \exists n \in \mathbb{N}:$

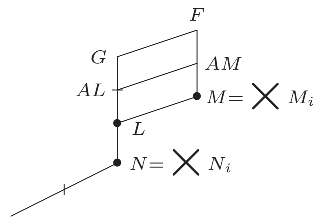
$$\{g_1 \dots g_l\}(\circ\{a_1 \dots a_k\})^n \subseteq A$$

3′ Sei H ℓsnℓ G. Gilt $N \lhd H \Rightarrow N$ ℓsnℓ G, $G \lhd K \Rightarrow H$ ℓsnℓ K?

Gegenb $\mathcal{M}\pi G$: 4 Falsch ist: Aus $A, B \in \mathcal{M}\pi G$, $A \underset{G}{=} B$ folgt $A \underset{\langle A,B\rangle}{=} B$:
$|G| = 2 \cdot 168$, $G \rhd G_{168}$, $\pi = \{2,3\}$, $|A| = |B| = 24$.

258/259a

$A \in \mathcal{M}\mathcal{E}G$, $A\mathcal{E} \leq B \in \mathcal{M}\mathcal{E}H$, $H = GM$



$M_i = \operatorname{Aut}_G N_i$, $M/N \in \mathfrak{S}$
B auf M/N, läßt π-Hallgr H/N fest von M/N, $M/N = H/N \cdot H'/N$,
$H'/N \in \pi$-Hall M/N, $AM \cap G = A(M \cap G) = AL$.

259a/259

Noch $\mathcal{M}^{\frown}$

FRAGE $\mathcal{M}^{\lhd\lhd}$ 1 Sei $G_{\mathfrak{S}} = 1$, $P = \operatorname{soc} G$ $(= \operatorname{soc}' G)$, $S/P = (G/P)_{\mathfrak{S}}$.
"Kopplung" 10.12.77 Ist dann jedes $A \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathcal{E}S$ der Schnitt $A \cap P = B \cap P$ mit einem passenden $B \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathcal{E}G$? siehe 260′

Projektion: 2 Wann ist man sicher, dass für $A \leq G$, $Y \leq X \leq G$ gilt:

$$|A\neg X : Y| \text{ teilt } |X : Y|?$$

FRATTINI 3 Folgt aus $G = AB$; $A, B \trianglelefteq G$ stets $\Phi(G) = \Phi(A)\Phi(B)$?

$\lhd\lhd\lhd$ 4 $A \operatorname{sn} \langle A, g_1, \dots, g_n\rangle$ $\forall g_\nu \in G$.

5 Gilt Satz vom Permutator für $A, B \in L \operatorname{sn} G$?

259/260

$\mathcal{M}_{\mathcal{E}}G$

Satz (1) $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}G$: Maximalschnitte UAd Schreier V.

Sei $N \lhd G$, N halbeinfach, $N = \bigtimes N_i$. Die sämtlichen "Maximalschnitte" $A \cap N$, wo $A \in \mathcal{M}_{\mathcal{E}}(G)$, erhält man so:
Wähle $T \in \mathcal{E}G$ [$/N$?], in jeder Bahn auf $\Omega := \{N_i\}$ von T wähle ein N_α, in N_α wähle eine maximale unter den bei $T_\alpha := \mathcal{N}_T(N_\alpha)$ invarianten $\mathcal{E}$-Gruppen, etwa A_α. Dann ist das Erzeugnis der A_α^T ein Maximalschnitt, seine Komponenten in N sind die verschied. N_α^t, $t \in T$. Es ist nämlich $A_\alpha = N_\alpha \cap A$ für jedes A mit $T \leq A \in \mathcal{M}_{\mathcal{E}}G$.

Spektrum und Winkelvorrat einer Matrix.

FRAGE (1) A_i habe Winkelvorrat $\mathfrak{W}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.
27.1.78 Ist dann Spektr$A \leq \mathfrak{W}_1 \mathfrak{W}_2 \ldots \mathfrak{W}_n$

Subnormalisator (Forts. v. 194)

(35) Die A-Untermoduln von $A_0 Z$ sind dieselben wie die P-Moduln und wie die A^G-Moduln.
Bew: $A^G = A_0 ZP$, $A_0 Z$ abelsch

(36) Die A-Länge von $A_0 Z$ ist 2.
Bew: $[A_0 Z, S]$ ist Z-Modul und nach (35) zugleich A-Modul, da $[A, S] \leq A_0 Z$.

(37) G hat wohl im wesentlichen die Gestalt $\left\{ \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ z & y & 1 \end{pmatrix} \right\}$, wo $x, y \in \mathrm{GF}(q) = F$, $\rho \in F^\times$, $\operatorname{Ord} \rho = p$.

Subnormalisator

(1) a) $G = AB$, $A \operatorname{sn} \langle A, A^b \rangle \; \forall_b \Rightarrow A \operatorname{sn} G$. Bew su

FRAGE b) 〃 $b(\circ a)^n \in A \; \forall_b \overset{?}{\Rightarrow}$ 〃
Genügt etwa schon eine Transversale B von $G : A$?

FRAGE (1′) Statt $A \operatorname{sn} \langle A, B \rangle$ wird $B \subseteq S(A, G)$ (für welche Def.?) genügen.

″ 1″ Folgt aus $G = AB$, $S \operatorname{sn} \langle A, b \rangle \; \forall_b$ stets $S \operatorname{sn} G$?

Satz: ja: $S \operatorname{sn} \langle A, A^b \rangle = \langle A, A^g \rangle$, $S \operatorname{sn} \langle S, S^g \rangle$

FRAGE (2) Für welche Def. gilt $A \subseteq \mathcal{S}(B, G)$, $B \subseteq \mathcal{S}(A, G) \Rightarrow A \operatorname{sn} B$?

Frage 1.9.79 (3) Ist $x \in S_G(A) \Rightarrow \langle x, \rangle \subseteq S_G(A)$ ein vernünftiges <u>Axiom</u> für Subnormalisatoren?

Beweis (1a) $A \operatorname{sn} \langle A, A^b \rangle \; \forall_b \Rightarrow A \operatorname{sn} \langle A, A^{ab} \rangle \Rightarrow A \operatorname{sn} \langle A, A^g \rangle$

Monomiale Gruppen, Verlagerung

15.2.78 (1) Eine monomiale Gruppe, in der alle Diagonalfaktoren 1 sind, kann monomial auf Permutationsform transformiert werden.

(2) "Symmetrie" $P^{*g} \cap P = P^g \cap P^*$ ist äqui. "P^* stark abg in P"

(3) Sei $P \in p$-Syl (G), $P_0 \leq P$. Dann gibt es höchstens ein $K \lhd\lhd G$, das zu $P : P_0$ komplementär ist im Sinn von $K \cap P = P_0$, $KP = G$. (Daher folgt dann aus $P_0 \trianglelefteq P$ stets $K \lhd G$).

(4) Aufgabe Untersuche: geg $P_0 \leq P \in p$-Syl G. In jedem H mit $P \leq H \lessdot G$ existiere ein $H_0 \lhd\lhd H$, das Kplt zu $P : P_0$ ist, aber nicht zu G selbst. Liegt P nur in einer maximalen Untergruppe?

263/264

Noch p-Faktorgruppen und Verwandtes

(1) Kann man die Theorie von Thompson erweitern, bei gegebenem $a \in P \in \mathfrak{G}_p$, auf die Menge $A_a(P)$ der abelschen Untergruppen A, die unter der Bedingung $a \in A$ die maximale Ordnung haben?

(2) In meiner Crelle-Arbeit kann man statt einer stark abgeschl. Untergr. vielleicht mit dem ("starken" = "schwachen") Abschluß eines einzelnen Elements arbeiten.

264/265

p-auflösbare Gruppen: $p^\alpha q^\beta$

(1) $G \in \mathfrak{S}_p \Rightarrow \{\overbrace{A \text{ stark abgeschlossene } p\text{-Gruppe in } G}^{\text{äqui: } p\text{-Untegr } A \text{ ist pronormal}} \Leftrightarrow A \in \mathrm{Syl}_p A^G\}$. Bew. $|G| + |A|$ min

(2) $G \in \mathfrak{S}_p \underset{?}{\Rightarrow}$ maximale p-FaktGr von $G \cong$ der von $\mathcal{N}\overline{Z}$, $\overline{Z} :=$ schwacher Abschluß eines p-Sylow-Zentrums?

(3) $G \in \mathfrak{G}_{pq} \cap \mathfrak{S}$; $P \in p$-Syl G, $Q \in q$-Syl $G \underset{?}{\Rightarrow} ZJ(P) \,\mathrm{vtb}\, ZJQ$? auch $J(P) \,\mathrm{vtb}\, Q$? (Es ist wohl i.a. $ZJ(P) \cdot O_q(G) \trianglelefteq G$)

265/266

$\lhd\lhd$, schwacher Abschluß. Matsuyama

1.3.78

1. Aufgabe: Lemma von Matsuyama (Osaka M.J. 10) erweitern von p-Untergruppen auf bel.

   s.4

FRAGE 2. $G \geq A \in \mathfrak{G}_p$, $A \,\mathrm{sn}\langle A, A^g\rangle \Rightarrow A \,\mathrm{sn}\langle A, A^{g^-}\rangle$. Welche andern Ugr $A \leq G$ haben diese Symm-Eig.?

Def. 3. Sei $A \leq G$. Ein Normalprodukt zu A (in G) ist eine Gruppe $A_1 A_2 \ldots A_n$, wo $A_{\nu+1} \leq \mathcal{N}(A_1 \ldots A_\nu)$ und jedes $A_\nu = A^{g_\nu}$, $\exists g_\nu \in G$.

Eine Verallg. des Lemmas von Matsuyama:

4. Sei $Y, Z \leq G = \mathcal{N}_G(X) \cdot \mathcal{N}_G(Y) \Rightarrow$ Jedes maximale Y-invariante Normalprodukt X zu Z^Y ist ein (Y-invariantes) maximales Normlaprodukt zu Z^Y. Für $X^Y \in \mathfrak{G}_p \sim$ Matsuyama.

Bew. Sonst $\exists g \in G$: $Z^{Yg} \leq \mathcal{N}_G(X)$, $Z^{Yg} \not\leq X$. Also $\exists h \in Y_g$: $Z^h \leq \mathcal{N}_G(X)$, $Z^h \not\leq X$. Dann $Z^{hY} \leq \mathcal{N}_G(X)$, $\not\leq X$; aber es ist das Y-invar.

$Z^{hY} = Z^{mnY}$, $m \in \mathcal{N}_G(Z)$, $n \in \mathcal{N}_G(Y)$, also $Z^{hY} = Z^{nY} = (Z^Y)^n$, daher $X \cdot Z^{hY}$ ein größeres Y-inv. Normprod. zu Z^Y, Wid.

266/267

$\lhd\lhd$

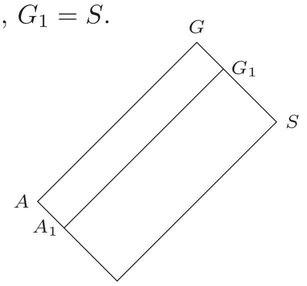
FR. 5 Sind je zwei maximale Kosubnormalsysteme, die $\subseteq \{A^g \mid g \in G\}$ sind, konjugiert in G?

20.3.78 <u>Satz</u> ("Junginger-Thema", schärfer: (7))

6. z. Subnormalisator:
$|G| < \infty$, $A \leq G$, $S \trianglelefteq G$, $s(\circ a)^n \in A\ \forall a, s \Rightarrow A \,\mathrm{sn}\, AS$. Schärfer: 269 (7)

Bew: Gegenb. min $|G|$, $|S|$. $D := A \cap S$

a) $D \,\mathrm{sn}\, G$ nach MZ-Arbeit
b) $A \leq X < G \Rightarrow A \,\mathrm{sn}\, X$ $(A, X \cap S)$
c) $\exists_1 M : A \leq M \lessdot G$; $g \notin M \Rightarrow A^g \not\leq M$
d) $S \cdot\!\lhd G$, sonst $1 < T \lhd G$, $T \leq S$ (A, T):
$A \,\mathrm{sn}\, AT$, $(AT/T, S/T)$ $AT \,\mathrm{sn}\, G$.
e) $1 < N \lhd G \Rightarrow AN \,\mathrm{sn}\, G$
f) $A_{\cdot\cdot G} = 1$, $\mathcal{N}(A_{\cdot\cdot G}) \geq A, S$, $A_{\cdot\cdot G} \lhd G$, $A_{\cdot\cdot G} \cdot A \,\mathrm{sn}\, G$
g) $D = 1$, a) f)
h) A einfach, $S \lhd\!\cdot\, G$. Bew: $\exists G_1 : S \leq G_1 \lhd\!\cdot\, G$;
$A_1 := A \cap G_1$, $A_1 \,\mathrm{sn}\, A_1 S = G_1 \lhd G$, $A_1 \leq A_{\cdot\cdot G} = 1$,
$A = A/A_1 \cong G/G_1$ einf., $G_1 = S$.



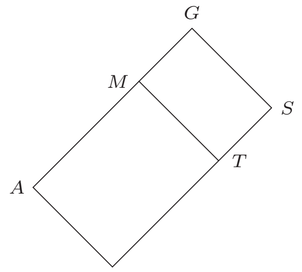
267/268

i $A' = A$, sonst $|A| = p$ (h)
$A = \langle a \rangle$, Aus $s \in S \backslash M$ folgt $s \circ a \in S \backslash M$, sonst $a^s \in M$, c Wid
$\forall n$ 〃 $s(\circ a)^n \in S - M$. Wid.

j $S' = 1$, sonst $\forall p \in \mathbb{P}$, $\forall P \in p$-Syl A: $P \operatorname{sn} PS$,
$S \leq \mathcal{N}P$, $S \leq \mathcal{N}\langle P \mid \forall p \rangle A \trianglelefteq G$

k $\exists\, p \in \mathbb{P}\ |S| = p^\sigma$ (j)

[l $A \lessdot G$ unnötig

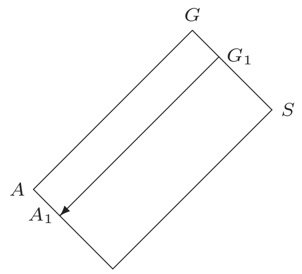


sonst $T \lhd M, S, G$; d): $T = \begin{cases} 1 & A = M \lhd G \\ S & M = G \text{ Wid.} \end{cases}$]

m Wid. Bew: $\exists\, q \in \mathbb{P}$: $q \mid |A|$, $q \neq p$ (j)
$\exists Q \in q$-Syl A, $Q \operatorname{sn}$, $S \leq \mathcal{N}(Q)$,
$Q^G = Q^{SA} = Q^A \leq A$,
$Q^A \leq A_{\cdot\cdot G} = 1$, Wid.

268/269

Satz 7 $A \leq G$, $S \operatorname{sn} G$, $AS = SA$, $s(\circ a)^n \in A\ \forall s, a \Rightarrow A \operatorname{sn} AS$.
schärfer: (8) Bew: $|G|$ min



(a) $S < G$

(b) $\exists G_1 : S \leq G_1 \lhd\cdot\ G$

(c) $A_1 := A \cap G_1 \operatorname{sn} G$

(d) $1 < N \trianglelefteq G \Rightarrow AN = G$. Bew: Sonst $AN = AT < G$, $T := AN \cap S$; $|G|$ min $\Rightarrow A \operatorname{sn} AT = AN$, $|G/N| < G$, $AN \operatorname{sn} G$, Wid.

(e) $A_1 = 1$. Bew: Wähle $N \cdot\!\lhd G$. Dann $\mathcal{N}A_1 \geq N$ (c) $\geq A$, AN, G d), $A_1 \trianglelefteq G$, $AA_1 = G$, d), Wid.

(f) $S \trianglelefteq G$, Bew: $S = G_1$.

(g) $A \operatorname{sn} G$, 267(6)

FRAGE (8) $S_\rho \operatorname{sn} G$, $s_\rho(\circ a)^n \in A \ \forall s_i \in S_i$, $\rho = 1, \dots, r \underset{?}{\Rightarrow} A \operatorname{sn}\langle A, s_1, \dots, s_r\rangle$.

s.270! Mir ist, als hätte ich schon mal ein Gegenbsp. gehabt.

269/270

Genügt wohl: $\exists \begin{cases} S_0 \text{ ein totales Erz.-System von } S \\ S_0^A = A \qquad\qquad\qquad\qquad\quad A \end{cases}$

Satz (8) $A \leq G$, $S \operatorname{sn} G$, $AS_0(\circ a_0)^\infty \subseteq A \Rightarrow A \operatorname{sn}\langle A, S\rangle$.

21.3.78 Bew: Ann Gegenbsp. $|G| + |A| + |S|$, daher S einköpf, $G = \langle A, S\rangle$, $S > 1$

Beweis berichtigt am 6.2.80

(a) $\forall a \in A : (A, S^a)$ haben dieselbe Eigenschaft

(a′) $1 < N \trianglelefteq G \Rightarrow AN \operatorname{sn} G$

(a″) $A_G = 1$.

(b) $A_1 \lhd A \Rightarrow A_1 \operatorname{sn}\langle A_1, S\rangle$.

(c) $A_1 \lhd A$, $a \in A \Rightarrow A_1 \operatorname{sn}\langle A_1, S^a\rangle$

(d) $A_1 \lhd A \Rightarrow A_1 \operatorname{sn} A_1T$ wo $S^A = S^G =: T \trianglelefteq G$. [197(6)]

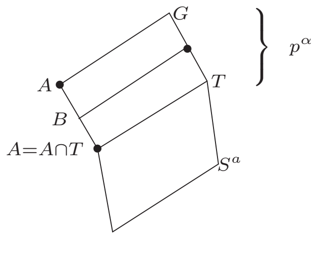
(e) $A_1 \lhd A \Rightarrow A_1 \operatorname{sn} G$ da $A_1T \trianglelefteq AT = G$.

(f) A einköpfig (e)

(f′) S einköpfig: $S_i \lhd S \Rightarrow A \operatorname{sn}\langle A, S_i\rangle$, $A \operatorname{sn}\langle A, S\rangle$ [197 (6)]

(g) $A/A \cap T \cong C_{p^\alpha}$, $p \in \mathbb{P}$, sonst $A\langle B/A_0 \mid A_0 \leq B < A\rangle$

$$\begin{aligned} &B \operatorname{sn}\langle B, S^a\rangle \ \forall a \\ &B \operatorname{sn} BT \\ &T(\circ B)^\infty \subseteq B \leq A \\ &T(\circ B)^\infty \subseteq A \\ &A \operatorname{sn} AT \quad (6)\text{Wid} \end{aligned}$$



270/271

(h) δ distr. Funktor, $S^\delta < S \Rightarrow S^\delta = 1$, sonst $1 < T^\delta \trianglelefteq G$,

$$\begin{aligned} &A \operatorname{sn}\langle A, S^{a\delta}\rangle \\ &A \operatorname{sn}\langle A, T^\delta\rangle \end{aligned}$$

(i) T ist keine p-Gruppe, sonst $G \in \mathfrak{G}_p$.

(j) (S und) T ist entweder $\in \mathfrak{G}_q$ mit $p \neq q \in \mathbb{P}$, oder halbeinfach, $= \bigtimes E_i$, alle $E_i \cong E = E'$ einf.

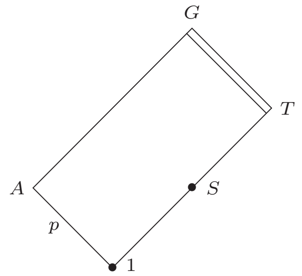
(k) $S_1 \operatorname{sn} S \Rightarrow S_1 \leq \mathcal{N}A$, $A \operatorname{sn}\langle A, S_1\rangle$, A nur Kopf $C_p \notin \mathcal{K}(S_1)$
<u>Fall I: S, T, E perfekt</u>

(l) $|A| = p$, sonst $1 < A_1 \underset{p}{\lhd} A$,
(1): $A_1 \operatorname{sn} A_1T$, $T \operatorname{sn} A_1T$, T halbeinf., $A, T \leq \mathcal{N}A_1$.

(l′) $A \cap T = 1$ da $A \not\leq T$, (l)

(m) S einfach (und perfekt) (j,k)

(m′) $T = \bigtimes_{a \in A} S^a$ (p Faktoren), sonst $S = T \trianglelefteq G$, 267 (6)



(n) $\forall Q < S : A \operatorname{sn}\langle A, Q\rangle$ da $Q \lhd Q^A \lhd \langle A, Q\rangle$, $Q(\circ a)^\infty \subseteq A$

(o) Wid. $A \lhd \langle A, S\rangle$, da $\forall Q \in q$-Syl S $A \lhd \langle A, Q\rangle$.
Also Fall I unmöglich bei unserem Geg.Bsp.

271/272

<u>Fall II: S, T sind q-Gruppen, $q \neq p$.</u>

(p) $|A| = p$, sonst $A_1 \underset{p}{\lhd} A$, $A_1 \operatorname{sn} AT$, $A_1 = O_p(AT) = O_pG$ (k).
$A_1 \lhd G$. Dann $A = AA_1 \operatorname{sn} G$

(q) $S_2 < S \Rightarrow A \lhd \langle A, S_2\rangle$ da $S_2 \operatorname{sn} S_i$ (k)

(r) $1 < F := \Phi(T) \Rightarrow AF \operatorname{sn} G \Rightarrow AF \underset{q\cdot\cdot}{\lhd} G \Rightarrow \mathcal{N}A$ deckt $\Rightarrow A \lhd AT$ Wid.

(r′) T elementar abelsche q-Gruppe

(s) $C_T(A) = 1$, sonst $A \lhd AC_T(A) \operatorname{sn} G$ (a′)

(s′) $C_G(A) = A$, da $= C_T(A)$

(t) Sei $S =: \langle S\rangle$ $\exists n : g := s(\circ a)^n \notin A$, $s(\circ a)^{n+1} = g \circ a \in A$, $g \circ a \in A \cap T = 1$, $g \in \mathcal{C}(A) = A$, Wid.

272/273

[gesamte Seite durchgestrichen: Teil eines überholten Beweises von Satz (8)]

(o) S einfach, d.h. $S \cong E$ Bezeich wie (n): Dann $[S_2, A^S] = 1$, $A^S \trianglelefteq G$, also $[S_2^G, A^S] = 1$, wäre $S_2 \neq 1$, so $A \lhd AS_2^G \operatorname{sn} G$.

(p) Also $|A| = p$, S einfach, $|S| \neq p$.

(q) $\exists s \in S : s \circ a \notin \mathcal{N}A$, sonst $\forall s : s \circ a \in \mathcal{N}A$, $A^s \leq \mathcal{N}A$, $A \lhd A^s \lhd G$.

(r) $\exists\ s \in S$, $k \in \mathbb{N} : t := s(\circ a)^k \notin \mathcal{N}(A)$, $s(\circ a)^{k+1} \in \mathcal{N}(A)$. Hiermit ist $s(\circ a)^{k+1} = t \circ a$; es wird

(s) $a^t \in \mathcal{N}(A)$, $t \notin \mathcal{N}(A)$, also $A < AA^t \in \mathcal{G}_p$.

(t) $p \mid |S| \quad$ (s) $|AA^t \cap T| = |AA^t : A|$

(u) $S' = S$, sonst $|S| = p \quad$ (o); Wid (p)

(v) $A \not\leq \mathcal{N}(S)$, sonst $S \lhd G$ Wid. 267_6

(w) $T = S \times S^a \times \cdots \times S^{a^{p-1}}$ denn $= S^A$, $S = S'$ einf.

273/274

[Unterpunkte (x) - (z) durchgestrichen: Teil eines überholten Beweises von Satz (8)]

(x) Für jede Primzahl $q \neq p$ lässt A eine q-Sylowgruppe T_q fest, nämlich S_q^A mit belieb. $S_q \in q$-Syl S, $T_q \lhd AT_q$.

(y) $T_q \leq \mathcal{N}(A)$. Bew: $A \operatorname{sn} \langle A, S_q \rangle$ ($|G|$ min) denn $S_q \operatorname{sn} T_q \lhd AT_q$; $\langle A, S_q \rangle = AS_q^A = AT_q$, $A \operatorname{sn} AT_q$, $|AT_q : A| = q^{\cdot^{\cdot}}$, $|A| = p$, $A = O_p(AT_q) \lhd AT_q$ (sogar $\leq Z(AT_q)$)

(z) $|T : \underbrace{\mathcal{N}_T(A)}_{=:H}| = p^{\cdot^{\cdot}} \quad$ (x,y)

Wid Endwiderspruch: $A^G = A^{AT} = A^T = A^{\mathcal{N}_T(A)P}$ $\forall P \in p$-Syl T, aber $\exists P = P^A$. DAmit $A^G = A^P \leq AP \in \mathfrak{G}_p$, $A \operatorname{sn} G$.

Satz (9) $A \leq G$, $S_\rho \operatorname{sn} G$, $A \trianglelefteq B \leq G$, $(\rho = 1 \ldots r)$,
$\forall a \in A$, $\forall s : S_\rho(\circ a)^\infty \subseteqq A \Rightarrow A \operatorname{sn} \langle B, S_1, \ldots, S_r \rangle$.
Bew: 8: $A \operatorname{sn} \langle A, S_\rho \rangle$ mit $T := \langle S_1, \ldots, S_r \rangle$ wird $A \operatorname{sn} \langle A, T \rangle$ [197_6];
$A \operatorname{sn} \langle A, T^b \rangle$ $\forall b \in B$. $\underbrace{A \operatorname{sn} \langle AT^B \rangle} \lhd \langle B, T^B \rangle = \langle B, T \rangle = \langle B, S_1, \ldots, S_r \rangle$.

Frage: Vielleicht direkt zu beweisen wie (8)?

274/275

Zerfallskriterium

Satz (1) Enthält G einen $\mathbb{P}$-Sylowturm ohne zentralen p-Hauptfaktor, so zerfällt jede p-Erweiterung von N. Statt Sylowturm geht auch der volle Normalisator einer intravarianten nilpotenten p-großen d.h. $|\mathcal{N}_G(I)/I| \not\equiv 0\ (p)$ Untergruppe I von G.

(2) Nach Gaschütz hat N ein Klplt C in G, wenn $N \underset{p^{\cdot^{\cdot}}}{\lhd} G$ und $N = N^p$ und die p-Syl P von N abelsch.

FRAGE Läßt jedes C eine p'-Hall-Gruppe von $\mathcal{N}_N(P)$ fest? Dann wären 2 C's konjugiert.

Nach Alperin gibt es verwandten Satz von Roquette im Buch von HUPPERT (Jahr 1978)

Aufgabe (3) $\mathcal{M}_\pi(G)$ untersuchen wenn G über einem Normalteiler zerfällt, oder wenn für jedes $p \in \pi$ die p-Syl-Gr'en der Komp.-Faktoren von G abelsch sind.

275/276

noch Zerfall

Aufgabe (4) Krit. für Existenz intravarianter Komplemente zu N in G (liefern Zerfallskrit. für N in H, wenn $G \lhd H$).

(4) $P \trianglelefteq N \underset{p\cdot\cdot}{\trianglelefteq} G$, $P \in p$-Syl N, $P' = 1$
$= [N, P]$ ist komplementiert in G
Bew: $C := \mathcal{N}_G(N_{P'})$; dabei $C \cap P \leq Z(C \cap N)$ aber die Kpl'te sind nicht immer konjugiert: $G = \operatorname{Sym} 4$.

Aufgabe (5) Zerfall von pq-Gruppen

(6) Literatur über Zerfall in Kompositionsklassen:
Šemetkov Sov. Math. Dokl. 13 (1972), separat Math USSR Sbornik 23 (1974) 〃

Aufgabe (7) Konjugiertheitssatz zu ŠEMETKOV 1970
(vielleicht mit Johnson-Zassenhaus).

〃 (8) Verallgemeinerung der "Satzes von Maschke", S. 137, mittels ŠEMETKOV

276/277

(1) Intravarianz: Jedes maximale (geordnete) intravariante System $\mathfrak{S}$ von Ugr von G enthält alle Gruppen, die von denen von $\mathfrak{S}$ aus eindeutig beschrieben werden können, z.B: $A, B \in \mathfrak{S} \Rightarrow \mathfrak{S} \ni \langle A, B\rangle$, $A \cap B$, $\mathcal{N}_B A$, $Z(A)$.
$\mathfrak{S}$ ist also ein Verband $\operatorname{Perm}_A(B)$ & jede char. Ugr. von A sn.

(2) Ist $\mathfrak{S}$ ein maxim. intrav. System und $N_{\mathfrak{S}} = \bigcap_{A \in \mathfrak{S}} \mathcal{N}(A)$ sein Normalisator, und ist $M/N := \operatorname{Fitt}(\mathcal{N}_G(N)/N)$, so ist M nilpotent.

Denn $N \in \mathfrak{N}$, also $M \in \mathfrak{S}$; Sei C Cartergruppe von M, $\alpha \in \operatorname{Aut}(G)$ lasse $\mathfrak{S}$ fest. Dann $C^\alpha N = M$, also $C^\alpha = C^n \exists n \in N$, also $\mathfrak{S} + C$ nachintravariant, also $C \in \mathfrak{S}$, $C^N = C$, $C \lhd M$, $C = M$, $M \in \mathfrak{N}$.

(3) Ähnlich: Ist $N \lhd S \in \mathfrak{S}$, und $S/N \in \mathfrak{F}$ = gesättigte Formation, so sind die $\mathfrak{F}$-Deckgr F von M normal in M. Daher ist $(|F/F'|, |N|) = 1$.

277/278

Erweiterungen

(1) Je zwei Kompositions-π-Sylow-Türme von G sind konjugiert in ihrem Erzeugnis (sie sind daher pronormal).
Bew mit G/N, $N \cdot\!\lhd G$, wenn N einf., S.153

(2) Def: $A \leq G$ heiße eine Erweiterungsgruppe (oder ein <u>universeller Supplement-Kern</u>) in G, wenn in jeder Erweiterung $G \lhd \overline{G}$ ein Supplement $\overline{A}$ zu G mit "Kern" A existiert: $\overline{A}G = \overline{G}$, $\overline{A} \cap G = A$.

Suppl-Kern Satz: Forts. XII 39

Satz (3) Sei $Z(G) = 1$. Dann sind genau diejenigen $A \leq G$ universelle Supplementkerne, für die es in $G \trianglelefteq G^*$ ein Supplement mit $\ker A$ gibt; daher
25.3.78 $G^* := \mathrm{Aut}(G)$.

Bew: Sei $A = A^* \cap G$, $A^*G = G^*$. Sei $G \lhd \overline{G}$. Setze $\overline{A} := \{\overline{g} \in \overline{G} \mid \overline{g}$ induziert auf G einen Automorphismus aus $A^*\}$. Also $A_{G^*}(A)$ muß G^*/G decken, mit $\mathcal{N}_{G^*}(A)/A$ muß über $\mathcal{N}_G(A)/A$ zerfallen.

(4) Aufgabe: Für $G := G_1 \times \cdots \times G_n$ alle $G_i \cong E$ einfach $= E'$ die univ. Supplement-Kerne. Es ist $G^* = E^* \wr S_n$, $G^*/G = (E^*/E) \wr S_n$.

278/279

(5) Wenn $E^* : E$ zerfällt, so auch jedes $\overline{G} : G$.

(6) Intravarianz ist erst dann allgemein genug, wenn man sie auf $G^n = \{(g, g, \ldots, g) \mid g \in G\}$ ausdehnt: $T \subseteq G^n$ intravariant bezüglich komponentenweiser Anwendung der (äuß. und inneren) Automorphismen von G.

(7) Das Čunihin-Verfahren liefert zu jedem in G intravariant A ein $\widehat{A} \leq G$ so dass $\widehat{A}$ ein universeller Suppl.-Kern ist und $\widehat{A}/A$ eine Sylowturmgruppe vorgeschrieb. Anord.

(8) Zur Intravarianz, d.h. zur Deckung von G^*/G durch $\mathcal{N}_{G^*}(A)$, genügt Deckung eines Erzeugendensystems. Bei (4) ist das durchsichtig wählbar.

279/280

Inhalt

Lange Bahnen 204
Gaschütz-Maschke 127-137, [Vorl. # 110] 181, 52
Frattini 225
$\mathcal{M}^{\triangleleft\triangleleft}\mathcal{E}G$, $\mathcal{M}\mathcal{E}G$ 226, 230 - 253!, 260 s. auch “Große π-Untegr.”
Quotienten 256
Monomiale Darstellungen von p-Gruppen 258
Verallgemeinerte Subnormalität 258
Zerfallskriterien 275

280/281

Intravarianz 159 239 257 277 279
Kompositions-π-Sylow-Türme 278 154/5 159_2
Erweitg, Supplement-Kerne 278
Engel-Krit. f. Kosubnor. 270