Prof. Dr. Helmut Wielandt

Tagebücher

D16

26.3.78 – 6.1.80

0/1

Erweiterung, Supplementkerne

26.3.78

(1) Def: K heißt ein universeller Supplementkern in N wenn zu jedem G mit $N \trianglelefteq G$ ein $S \leq G$ existiert, so daß $NS = G$ und $N \cap S = K$.

(2) Bsp.: Genau dann zerfällt jede Erweiterung von N, wenn 1 ein univ. Splt-Kern ist.

Satz (3) $|N| < \infty \Rightarrow$ Jeder univ. Splt-Kern in N enthält das Hyperzentrum H von N. Die univ. Splt-Kerne in N sind mod H die relativ universellen Splt-Kerne von N/H, die zu den von aut M auf N/H induzierten Automorphismen gehören.

FRAGE (3) FRAGE: Wenn $Z(N) = 1$, sind dann die univ. Splt-Kerne in N genau die selbstnormalisierenden intravarianten Untergruppen von N?

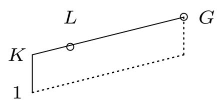
Aufgabe (4) AUFGABE: Gibts sowas Ähnliches auch bei nicht normalen N? also $K \in N$ so daß $\forall\ G \geq N\ \exists S \leq G : N \cap S = K$? G

1/2

Def (1) Universalsplitter: $K \leq L$ heiße ein Universalspl. für L, wenn

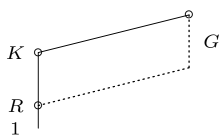
$$L \trianglelefteq G \Rightarrow \begin{cases} K \trianglelefteq G, \\ G \text{ splits over } K : \end{cases}$$

notwendig ist $K \blacktriangleleft L$.



"In jeder Erw von L gibt es ein Kplt zu K"
Bsp: (3)

Def (2) Retract: $R \leq K$ heiße eine Retrakt, schreibe R ret K, von K, wenn
$K \trianglelefteq G \Rightarrow \exists$ Supplement S von K in G mit $K \cap S = R$
Vorschlag Destins 1.5.79: supplemental



Bsp (4): Eine in L charakter. Obergr K eines Retracts R ist ein universalsplitter
Fortsetzung 3_2 (= „extension kernel")

(3) Sei $K \trianglelefteq L$, es gebe genau eine K-Klasse selbstnormalisierender Komplemente zu K in L. Dann K univ. splitter L.

(4) $S \leq G$, $S \in \mathfrak{S}$, S intrav. G, C Cartergr. von $S \Rightarrow S$ ret G.

FRAGE (5) Was folgt aus $A \in$ min Splt B, $B \in$ min splt A?
Fortsetzung XVII 39.

2/3

Unabhängige Supplemente, Erweiterungskern

26.3.78

(1) Sei $A \leq G$, $S_i \leq G$, $AS_1 = AS_2 = G$, $A_i := A \cap S_i$. Falls $A_1 A_2 = A$, ist auch $S_3 = S_1 \cap S_2$ ein Supplement von A in G_1 mit $A_3 = A_1 \cap A_2$.
Bew: $A(S_1 \cap S_2) = A_1 A_2 (S_1 \cap S_2) = A_1(A_2 S_1 \cap S_2)$
$\Downarrow$ $A_2 S_1 = A_2 A_1 S_1 = AS_1 = G$, also $= A_1 S_2 = G$.

Indukt (1′) Der Durchschnitt beliebig vieler <u>unabh.</u> Supplementschnitte ist auch einer.

„Erweiterungskerne": (extension kernel)

25.4.78 2 Def. $\mathfrak{E}(N) :=$
$\{E | E \leq N;$ zu jedem G mit $N \lhd G \; \exists \; S \leq G : NS = G, N \cap S = E\}$
Schreibe kurz E ek N. Dann gilt:

3
a) A ek B ek $C \Rightarrow A$ ek C
b) $S \in$ Syl $N \Rightarrow \mathcal{N}_N(S)$ ek N
c) Σ intrav in $N \Rightarrow \mathcal{N}_g(\Sigma)$ ek N
d) $N \in \mathfrak{S} \Rightarrow$ Cart N ek N
e) A ek N, $C \trianglelefteq N \Rightarrow CA$, $C \cap A$, $\mathcal{N}_C A$ ek N
f) $C \trianglelefteq N$, A/C ek $N/C \Rightarrow A$ ek N
g) $O^{\pi'}(N)$ ek_π N
h) Die Fixpunkte eines „p-Sylow-Huts" $N \in \text{cpl}(P, \mathcal{N}P)$ in P sind ein p-extension-kernel, da $= \mathcal{N}_P(N)$.

3/4

Tra Perm Gruppen | Erweiterungskerne

(1) Eine endliche transitive Permutationsgruppe G, in der jede echte Untergruppe einen Fixpunkt hat, hat $|G| = 1$ oder $|G| \in \mathbb{P}$
Bew: Jordan.

Erw.kerne: (2) Die Schnitte von A_n, $n \neq 6$, mit den minimalen Supplementen von A_n in S_n sind die $\langle t \rangle$, wo Ord $t = 2^\tau$, $t \in A_n$, $\exists\ S \in S_n$ mit $S^2 = t$.
Diese Erweiterungskerne sind aber nicht minimal außer $\tau = 0$.

(2′) Beispiel eines Nicht-Erweiterungskerns für A_n:

$$\langle (12 \cdots 78)(9 \cdots 12) \rangle.$$

(3) $A \in \mathfrak{E}(N) \Rightarrow \mathcal{N}_N(A) \in \mathfrak{E}(N)$

(4) $N = N_1 \times N_2,\ N_i \blacktriangleleft N \Rightarrow \mathfrak{E}(N_1 \times N_2) = \mathfrak{E}(N_1) \times \mathfrak{E}(N_2)$

4/5

Projektionsmethode

Warwick 31.3-27.5.78

1.4.78 Wie weit kann man Subnormalität einer Untergruppe A an den Projektionen von A in die Faktoren einer (oder vieler) Subnormalreihen von G erkennen?

[8/ 80: Ist die "Projektions-Eigenschaft" (Abstr. bei Schnitt mit sn G) gleichwertig mit der Verträglichkeit mit den Zassenhaus-Isomorphismen?
Sie gilt sicher, wenn $A \neg G^\nu \in \mathfrak{L}_\pi G^\nu$ für die Faktoren einer Kompreihe $\{G_\nu\}$ von G.]

5/6

$\lhd\lhd$ Normalisatorsatz

12.4.78 (1) Falsch ist die Vermutung:
Aus $A, B \trianglelefteq G$, $A \leq \mathcal{N}(\text{sn } A^{\mathfrak{N}})$, $B \leq \mathcal{N}(\text{sn } B^{\mathfrak{N}})$, $G = AB$ folgt $G \leq \mathcal{N}(\text{sn } G^{\mathfrak{N}})$.
Kleinstes Gegenbeispiel hat $|G| = 36$:
Erweitere $K \times L = C_3 \times C_3$ durch $R \times S = C_2 \times C_2$ vermöge

$$\begin{array}{rcl} R & : & k \mapsto k, l \to l^-; \quad A := KLR \\ S & : & k \to k^-, l \to l^-; \quad B := KLS. \end{array}$$

Dann

$$\begin{array}{rl} X := & \langle kl \rangle \ntrianglelefteq G, \text{ aber} \\ X \leq & G^{\mathfrak{N}} = A^{\mathfrak{N}} \cdot B^{\mathfrak{N}} = KL \end{array}$$

6/7

$M\mathfrak{X}G$ $\qquad |G| < \infty$

9.4.1978 Warwick

Def (1) Im folgenden sei $\mathfrak{X}$ eine Sylowklasse von endlichen Gruppen, d.h. abgeschl. gegen Untergruppen, Homomorphismen, Erweiterung mit $\mathfrak{X}$.

Satz (2) Vor:

(i) Jedes $A \in \mathfrak{X}G$, das einen <u>einfachen</u> <u>Ausschnitt</u> F von G fest läßt, läßt ein $F_1 \in M\mathfrak{X}F$ fest. (Automatisch erfüllt für $|F| \in \mathbb{P}$)

(ii) $c\mathfrak{X}(F) = 1$ für alle einf. Ausschnitte von G.

Beh.: Zu je zwei $A, B \in \mathfrak{X}G$ $\exists$ $g \in \langle A, B\rangle$: $\langle A^g, B\rangle \in \mathfrak{X}$.

[Randbemerkungen:] ohne Schreier! kurz: „Maximal-Stabilisierung in G“ + „Einfache Sylowsätze in G“ $\Rightarrow$ “Starken Sylowsatz in G“ [geprüft] Schärfer 16_2

NB: Vor. vererbt sich auf $H \leq G$ und G^φ

Bew: (G, A, B) Gegenb., $|G|$ min, $|A| + |B|$ max

a) $G = \langle A, B\rangle$

b) $q = \langle A^g, B\rangle$ $\forall g \in B$

c) $A, B \in M\mathfrak{X}G$;

d) $\exists$ N $\cdot\!\lhd$ G; hierfür ist $N \notin \mathfrak{X}$: G/N

e) $N \neq 1$ sonst Schur Zass.

f) Sei $N = N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_r$, $A_1 := A \cap G_1$, $A^1 := A \cap N_1$. Beh: $A^1 \in M\mathfrak{X}N_1$
Bew: A_1 läßt ein $\overline{A^1} \in M\mathfrak{X}N_1$ fest nach Vor.
$\overline{A_1}^A \in \mathfrak{X}$, $\overline{A}_1^A \leq A$, $\overline{A}_1 \leq A$, $\overline{A}_1 \leq A \cap N_1 \in \mathfrak{X}$, $\overline{A}_1 = A \cap N_1$ also
$A_1 \in M\mathfrak{X}N_1$ G

7/8

g) $\exists$ n_1: $A^{1^{n_1}} = B^1$. Ebenso $A_i^{n_i} = B_i$ (Vor. $c_{\mathfrak{X}}(N_1) = 1$)

h) $n := n_1 \cdots n_r$ macht $(A \cap N)^n = B \cap N$

i) $B \cap N \trianglelefteq \langle A^n, B\rangle = G$

j) $B \cap N = 1$ sonst $B \cap N = N \in \mathfrak{X}$; Wid. (d)

k) $1 = A_1 \in M\mathfrak{X}N_1$, $N_1 = \pi'$-Gp, wenn $\pi = \pi(\mathfrak{X})$

l) Wid Zassenhaus: G/N.

FRAGE 3: Folgt aus $A \in M_\pi G$ und S sn G, daß $A \cap S$ maximal ist unter den $(A \cap S)$-invarianten π-Untergruppen von S?

FRAGE 4: Gilt das Konjugiertheits-Krit. mit Proj-schon für $A, B \in \mathfrak{L}\mathfrak{X}G$?

Vertauschbarkeit:

5. $A \wp B \Rightarrow A \wp (AgA \cap B)$

6. Jede maximale oberhalb einer Sylow.Norm.-Turmgr. hat die „Projektionseigenschaft“ bzgl sn G.

7. Folgt aus A sn AB, A sn AC, $B' = B$, $C' = C$ auch A sn $\langle ABC \rangle$?

8/9

Starker $\mathfrak{X}$ Sylowsatz $M\mathfrak{X}G$ (Forts)

Def (1) $\frac{K}{L} =: \hat{F}$ heiße ein Kritscher Ausschnitt von G, wenn

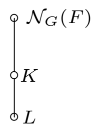
(i) $\exists\ F = F'$ einfach $\trianglelefteq\ K/L$, d.h. soc K/L perf. einfach

(ii) $\mathcal{C}_G(F) \le L$

(iii) $K = \mathcal{N}_G(F)$

schreibe dann:

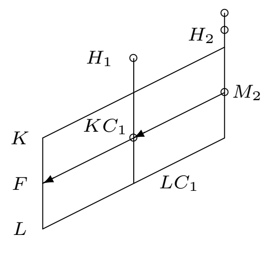
Bem. (2) K/L krit G. Dann $K/L \overset{\sim}{\le}$ Aut F.



Satz (3) Vor.: $\mathfrak{X}$ Sylowklasse; für jeden kritischen Ausschnitt mit Sockel F sei $c_{\mathfrak{X}}(F) = 1$, und für jedes $X \in \mathcal{M}\mathfrak{X}\hat{F}$ sei $X \cap F \in \mathcal{M}\mathfrak{X}(F)$.
Beh: Dann $\bar{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{X}}(G) = 1$, d.h. in jeder Untergruppe M von G gilt der $\mathfrak{X}$-Sylowsatz $c_{\mathfrak{X}}(H) = 1$, oder glw: $A, B \in \mathfrak{X}(G) \Rightarrow \exists\ t \in \langle A, B\rangle : \langle A^t, B\rangle \in \mathfrak{X}$.
(kurz: In G gilt der starke $\mathfrak{X}$-Sylowsatz)
Bew: Ist K/F beliebiger einf. nichtab. Ausschnitt, $C_1 = C_G(F)$

$$C_i = K/F = C_G(F), \quad H_i := \mathcal{N}_G(KC_i) \cap \mathcal{N}_G(LC),$$

so ist H_∞ / C_∞ krit G.



Jedes $X \in \mathfrak{X}H_\infty$ läßt ein $M_\infty \in KC_\infty / LC_\infty$ fest, daher auch $M \cap K/L$, und das $\in \mathcal{M}\mathfrak{X}(F)$. Also ist die Vor. von 7(2) erfüllt, $\overline{\mathcal{C}}_{\mathfrak{X}}(G) = 1$. Dabei

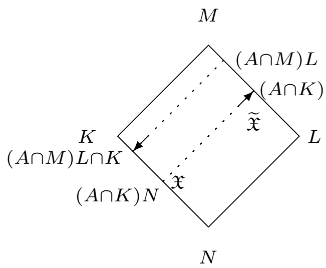
Def (4) $\overline{\mathcal{C}}_{\mathfrak{X}}(G) = \max \mathcal{C}_{\mathfrak{X}}(H),\ H \leq G.$ G

9/10

$\mathfrak{X}G$

Allgemeiner Hilfssatz über große $\mathfrak{X}$-Projektionen:

(1) Sei



ein normales Parallelogramm in G. Sei $\mathfrak{X} = {}_{SQ}\mathfrak{X}$. Sei $A \leq G$.
Ist $A \neg M/N \in \mathfrak{X}$ und $\underline{A \neg K/N \in \mathfrak{L}\mathfrak{X}K/N}$, so ist

a) $(A \cap M)L \cap K = (A \cap K)N$

b) $(A \cap M)L = (A \cap K)L$, daher

c) $A \neg \frac{K}{N} = (A \neg \frac{M}{L}) \neg \frac{K}{N}$

Bew. $\mathcal{N}\Big((A \cap K)N\Big) \geq (A \cap M)L \cap K \quad [(A \cap M)L \cap K]/K \in \mathfrak{X}$

(a) $(A \cap M)L \cap K = (A \cap K)N \quad | \cdot L$
$(A \cap M)L \cap \underbrace{KL}_{M} = (A \cap K)L$

(b) $(A \cap M)L = (A \cap K)L$
$(A \neg \frac{L}{M}) \neg \frac{K}{N} = \big((A \cap M)L/L\big) \neg \frac{K}{N} = [(A \cap M)L \cap K]N \Big/ (L \cap K)N$

(c) $= (A \cap K)N/N = A \neg \frac{K}{N}$

(2) $K_1 \leq K_2 \leq L_2 \leq L_1,\ K_i \neg L_i,\ A \leq G \Rightarrow (A \neg \frac{L_1}{K_1}) \neg \frac{L_2}{K_2} = A \neg \frac{L_2}{K_2}$

10/11

Starker Sylowsatz: noch $\mathcal{M}\mathfrak{X}(G)$

S.S-Satz (1) $\mathfrak{X}$ Syl Klasse. Dann äq.

8.4.78 (i) für jeden kritischen Ausschnitt $\hat{F}$ von G ist $C_{\mathfrak{X}}(\hat{F}) = 1 = C_{\mathfrak{X}}(F)$.

(ii) $\overline{\mathcal{C}}_{\mathfrak{X}}(G) = 1$

Bew: ii $\to$ i trivial.
i $\to$ ii: $\hat{X} \in \mathcal{M}\mathfrak{X}\hat{F} \Rightarrow \hat{X} \cap F \in \mathcal{M}\mathfrak{X}F$; denn wähle $Y \in \mathcal{M}\mathfrak{X}F$, $Y \leq \hat{Y} \in \mathcal{M}\mathfrak{X}\hat{F}$.
Dann $\hat{Y} \cap F = Y \in \mathcal{M}\mathfrak{X}F$. $c_{\mathfrak{X}}(\hat{P}) = 1 \Rightarrow$
$\exists t \in \hat{F}$: $\hat{X} = \hat{Y}^t$, $\hat{X} \cap F = (\hat{Y} \cap F)^t \in \mathcal{M}\mathfrak{X}F^t = \mathcal{M}\mathfrak{X}F$.

Bem (2) Vor (1) besagt etwas weniger als: Der $\mathfrak{X}$ Sylowsatz gilt in allen einfachen perfekten Ausschnitten von G sowie in deren Automorphismengruppen, soweit sie von G aus induziert werden.

FRAGE: Kann im Konj- Satz die Vor. $A \in \mathcal{M}\mathfrak{X}G$ ersetzt werden durch folgenden?
„$A \in \mathfrak{X}G$, und aus $B = B^A \in \mathfrak{X}_{G_1}$ folgt $B \leq A$“ G

11/12

$\mathcal{M}\mathfrak{X}G$

FRAGE: Seien $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ Sylowklassen, $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y} = \{1\}$. Genügt es für $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{schlampig geschrieben}}}{c_{\mathfrak{X}+\mathfrak{Y}}}(G) = 1$, wenn
$c_{\mathfrak{X}} = c_{\mathfrak{Y}} = 1$ und $\exists\ A_{\mathfrak{X}} \times B_{\mathfrak{Y}}$?
z.B. $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}_\pi$, $\mathfrak{Y} = \mathfrak{G}_\rho$, $\mathfrak{X} + \mathfrak{Y} := \mathfrak{G}_{\pi\cup\rho}$

FRAGE: Genau wann ist A durch die $A \neg G^1$ bis auf Konjugiertheit bestimmt?

Bem: Bei Projektion in Normalreihen gilt diese wohl unter schwächeren Vor. über A als bisher.
vielleicht: $A \leq \mathcal{N}B$, B aufl über einem Normalteiler von A, $B = B^A$: $B \cap A \in \mathfrak{G} \Rightarrow B \leq A$.
Nenne solche A voll in G
A voll in G, $A_0 \lhd A \to A/A_0$ voll in $\mathcal{N}A_0/A_0$.

Proj. Eig.: Die Vor. A erblich groß ist unnötig stark: Für die Projektionseig. von sn G in A reicht es aus, wenn $[A \neg G^\nu \lhd B \leq G_\nu,\ cfB = cfA] \Rightarrow A = B$.
Hartley setzt voraus: entweder Schreier, oder jede π-Ugr von G/H ist auflösbar.
Für den $A \underset{(AB)}{=} B$ - Satz braucht man sicher nur eine der Gruppen als maximal vorauszusetzen.
Forts. 81

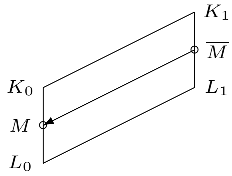
12/13

? Satz (1): Genau dann gilt der starke Sylowsatz in G, wenn der gewöhnliche $\mathfrak{X}$-Sylowsatz in allen kritischen Ausschnitten gilt. Daher heisst K/L krit G, wenn soc K/L einfach; $c_G(K/L) \leq L$, $\mathcal{N}_G(K/L) = K$. [von selbst ist soc $K/L =: F$ perfekt]

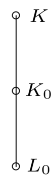
Die Vor. vererbt sich vielleicht nicht auf Untergruppen!

Beweis: Sei (G, A, B) Geg. bsp, $|G|$ min, $|A| + |B|$ max.

a) Ist K_0/L_0 einf. perfekt und läßt ein $X \in \mathfrak{X}G$ K_0/L_0 fest, so läßt X auch eine max. $\mathfrak{X}$ Untergr. von K_0/L_0 fest.
Bew Gegenb. L_0 max., dann $\mathcal{N}(K_0/L_0)$ max.
$L_1 := L_0 \cdot \boxed{C(K_0/L_0) =: C}$



$K_1 := K_0 \cdot C(K_0/L_0)$
$\underline{L_1 = L_0}$ Sonst $L_1 > L_0$; X läßt K_1/L_1 fest, also ein
$M_1 \in \mathcal{M}\mathfrak{X}\, K_1/L_1$, $M_0 := K_0 \cap \overline{M}_1$ bleibt bei X fest,
wegen $\frac{K_0}{L_0} \cong \frac{K_1}{L_1}$ ist $M_0 \in \mathcal{M}\mathfrak{X}^{K_0}/_{L_0}$ also $L_0 \geq c$.
$K := \mathcal{N}_G(K_0/L_0)$. Dann K/L_0 krit.
Sei $X \in \mathfrak{X}\mathcal{N}_G(K_0/L_0) = \mathfrak{X}(K)$.
$\ni \widehat{X}\ G\ \mathcal{M}\mathfrak{X}(K_0/L_0)$, $\widehat{X} \supseteq L_0X/L_0$



Wegen $c_{\mathfrak{X}}K/L_0$ ist $\widehat{X} \cap (K_0/L_0) \in \mathcal{M}\mathfrak{X}(K_0/L_0)$ und bleibt bei X fest. Forts. 14

(b) Für jeden einfachen Ausschnitt F von G ist $c_{\mathfrak{X}}(F) = 1$. Klar für $F = G$, Indukt für $F \neq G$.

(c) Rest mit 7(2). [(b) und (c) sind nachträglich eingefügt.]

13/14

[Die folgenden Unterpunkte b) bis k) sind insgesamt durchgestrichen.]

b) Sei (G, A, B) mit $|G|$ max, $|A| + |B|$ min so gewählt, daß in G a) gilt und $A, B \in \mathfrak{X}G$, aber für kein $g \in G$ $\langle A^g, B\rangle \in \mathfrak{X}$. Dann

c) $\begin{cases} \langle A^g, B\rangle = G\ \forall\, g \\ A, B \in \mathcal{M}\mathfrak{X}G \end{cases}$

d) $G \neq 1$

e) G nicht einfach (weil $G/1$ kritisch G).

f) $\exists N \cdot\!\underset{\neq}{\lhd} G$

g) $N \notin \mathfrak{X}$ Wid. $G/N \in \mathfrak{X}$ (c)

h) $N' = N$ sonst Zass. G/N, $N \in \pi'_{\mathfrak{X}}(G)$.

i) $N = N_1 \times \cdots \times N_r$. Dann $A \cap N_1 \in \mathcal{M}\mathfrak{X}N_1$ (Bew 7_f)

j) $C_{\mathfrak{X}}(N_1) = 1$, da $N_1 < G$ und in N_1 Aussage a) gilt.

k) Weiter wie S. 8

Satz: Es gilt für $E = E'$ einfach

$$\{s(E) \cap n(F) \mid E \lhd F\}$$
$$= \{s(E) \cap n(F) \mid E \lhd\lhd F\} \quad ?$$

Bew: den nach meinem Hilfssatz! sogar bezüglich der vollen Auto-Gr:

$$= \{s(E) \cap n(F) \mid E \lhd \text{ Aut } E\}$$

14/15

"Totaler" = Starker Sylowsatz

[Satz (1) ist vollständig durchgestrichen.]

Satz (1) Wenn in jedem einfachen Ausschnitt von G der $\mathfrak{X}$- Sylowsatz gilt, so gilt in G der starke $\mathfrak{X}$ - Sy-Satz.
Bew: Gegbsp. $|G| = \min$. I. Sei G einfach. In G Schottky-Satz. In $H < G$ gilt nach Ind. sogar der starke $\mathfrak{X}$-Sy-Satz, also gilt in jeder Ugr von G der Sy Satz: $\overline{c}_{\mathfrak{X}}(G) = 1$.

Satz (2) $\boxed{\text{Schreier}}$ (a) $A, B \in \mathcal{M}\mathfrak{X}G$, b) $\mathfrak{X}$ Sylow ($\mathfrak{X} =_{PQS} \mathfrak{X}$),
c) aus "$F := K/L$ einfacher (nichtabelscher) Ausschnitt von G und $A \neg F \in \mathcal{M}\mathfrak{X}_{\mathcal{N}_A(F)}F$, $B \neg F = \cdots$" folge $A \neg \frac{K}{L} \underset{K/L}{=} B \neg \frac{K}{L}$ *
Dann $A \underset{G}{=} B$.

*NB: genügt c) für $F \prec\prec$ Faktoren einer geg. $\begin{cases} \text{Normal} \\ \text{SN} \end{cases}$ -Reihe v. G.

Bew a) Vor. überträgt sich auf $\overline{G} := \frac{G}{N}$, $\overline{A}$, $\overline{B}$; sowie auf H, A, B, Wenn $A, B \leq H$ (10.2)
b) Gegenb. mit min $|G|$ hat $G = \langle A, B\rangle$; wie S. 7-8

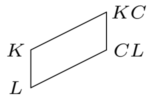
Schärfer:

(3) Genügt schon, nur die „kritischen" K/L zu betrachten

$$\mathcal{C}_G(K/L) \leq L.$$

noch schärfer: 16 Bew: Wiederholter Übergang von K/L zu KC/LC mit $C := \mathcal{C}_G(K/L)$.

Es ist



normal.
Die Vor. überträgt sich von KC/LC auf K/L (10_1).

15/16

10.4.78

Satz 1: α) $\boxed{\text{SCHR.}}$
β) $\mathfrak{X}$ Sylow;
γ) $A, B \in \mathcal{M}\mathfrak{X}G$;
δ) aus $F \in$ einfach perf. Aus (G) und $\mathcal{N}_A(F)$ läßt keine größere $\mathfrak{X}$-Ugr von F fest als $A\neg F$ und $\mathcal{N}_B(F)$ läßt keine größere $\mathfrak{X}$-Ugr von F fest als $B\neg F$ folge stets $A\neg F \underset{F}{=} B\neg F$.
Dann $A \underset{G}{=} B$.
NB: δ ist stets erfüllt wenn $F \in E_\pi^n$, $\pi = \pi(\mathfrak{X})$.
Bew: Die Vor. überträgt sich auf H, wenn $A, B \leq H \leq G$ sowie auf $\overline{G} = G/N$, wenn $N \in \mathfrak{X}$ oder $N \in \mathfrak{X}' := \mathfrak{X}_{\pi'}$. Denn wenn $F = K/L$ mit $L \geq N$, so $\mathcal{N}_A(F) \cdot H/N = \mathcal{N}_{AN/N}(KN/LN)$.
Dieser Satz umfaßt 7_2 sowie 15_2.

Bem. (2): Wenn jede π-Ugr von G nilpotent ist, braucht G keine π-Hall Gr. zu enthalten:

$$G = \text{ Alt } 8, \pi = \{3, 5\}$$

Allg. Satz 3) $\boxed{\text{SCHR.}}$ $A \in \mathcal{M}\mathfrak{X}G$; $N \trianglelefteq G$, $N = N' = N_1 \times \cdots \times N_r$

$$\Rightarrow \{A \cap N_1\} = \mathcal{M}\mathfrak{X}_{\mathcal{N}_A(N_1)} \cdot N_1$$

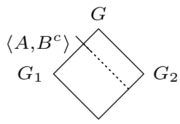
Frage (4) Sind je zwei maximale Untergruppen mit den gleichen Projektionen konjugiert?

16/17

Totaler Sylowsatz

Def (1) $G \in \mathfrak{T}_\mathfrak{X} :\iff c_\mathfrak{X}(H) = 1, \forall \;\; H \leq G.$

Satz (2) $G_1, G_2 \in \mathfrak{T}_\mathfrak{X} \Rightarrow G := G_1 \times G_2 \in \mathfrak{T}_\mathfrak{X}$.
Bew: GegBsp: $|G|$ min, $A, B \in \mathfrak{X}(G)$, $C := \langle A, B \rangle$
$\overline{G} := G/G_1 \; \exists \; \overline{c} \in \overline{C} : \langle \overline{A}, \overline{B}^{\overline{c}} \rangle \in \mathfrak{X}$



$\langle A, B^c\rangle\ G_1 = G$ wegen min $G_2 \cong G/G_1 \in \mathfrak{X}$, $G \in \mathfrak{X}$, $C \in \mathfrak{X}$ Wid.

[Bem. 2/80: Untersuchung der <u>minimalen nichtauflösbaren Gruppen</u> könnte zeigen, daß fast nie der totale π-Sylowsatz gilt.]
Zul. Arbeit Breuninger nachsehen.

Bem: 3 $A, B \in \mathcal{M}\pi G$ brauchen nicht im $\langle A, B\rangle$ konj. zu sein, wenn sie es in G sind. $G =$ Aut G_{168}, $\pi = \{2, 3\}$, $|A| = |B| = 24$

Frage: 4 gibts das auch in einfachen G?

Satz (5) Forts. von S. 15:

a) Genau dann gilt in $\mathfrak{b}$ der totale π-Sylow-Satz, wenn für jedes K, L mit $\begin{cases} C_G(K/L) \le L \\ L \lhd K \le G, F_1 = K/L \end{cases}$ nichtabelsch einfach $\notin \mathfrak{G}_\pi \cup \mathfrak{G}_{\pi'}$ gilt: m_π $\mathrm{Aut}_G(F) = 1$, und* je zwei π-Hall Gr. von F sind konj. in F.

b) genau dann gilt in G der totale $\mathfrak{X}$-Sylow Satz, wenn der totale $\pi(\mathfrak{X})$-Sylowsatz gilt und $\mathfrak{X}_\pi(G) \subseteq \mathfrak{X}$.
Beweis: p-Syl G $\subseteq \mathfrak{X}$ für $p \in \pi$.

OADSV! $*$ d.h. gewöhnl. Sy Satz in F & $\mathrm{Aut}_G F$.

17/18

DEDEKIND

1 $A(B \cap C) = AB \cap AC$ gilt schon, wenn

$$\begin{cases} aB \text{ unabhängig von } a \in A \text{ ist: } aB = a'B^*. \\ A, B, C \subsetneqq G \quad \text{oder } ABC \subseteq \text{ Halbgruppe } H \quad A \subseteq A^*{}_{\text{Gruppe}} \subseteq H_1. \end{cases}$$

d.h. $A^- AB = B$

18/19

π-Erzeugnisse von Konjugierten $\quad \lhd\lhd$

FRAGE 1 Sei $A \le G$ und stets $\langle A, A^g\rangle$ eine π-Gruppe. Ist dann A^G eine π-Gruppe?
Nein: $G = A_5$, $\pi = \{2, 3\}$, $A = \langle(12)\rangle$

FRAGE 2 Ist A sn G, sobald für jedes π und jedes $M \in \mathcal{M}\pi G$ der Schnitt $A \cap M \in \mathfrak{L}_\pi A$?

FRAGE 3 Ist A sn G, wenn für jedes X mit $A \leq X \leq G$ die Kegelsche Bedingung erfüllt ist, daß für jedes $p \in \mathbb{P}$, $S \in p$-Syl X gilt: $A \cap S \in p$-Syl A?

FRAGE 3′ oder wenn das Entsprechende für alle $X \leq G$ gilt für $A \cap X$?

19/20

zu ŠEMETKOV 1970 Operatorgruppen

(1) ŠEMETKOV's Satz gilt auch bezüglich Operatorgruppe Ω auf G, sofern $\big(|\Omega|, |G|\big) = 1$.

(2) Zulässigkeit von Untergruppen gegenüber einer Operatorgruppe Ω auf G bedeutet Zulässigkeit von Untergruppen gegenüber dem von ihr additiv erzeugten Fastring von Abbildungen $G \to G$.

FRAGE (3) Gilt Šemetkov universell, d.h. für Supplementklasse?

20/21

Normalisatorsätze

FR. 1 Gibt es für Normalisierung einen „Satz von Brewster“?

2

21/22

[Seite 22 ist leer!]

22/23

(Gaschütztyp-)Maschkesatz Forts. von XV 137

14.4.78 Satz 1 Vor: $M \trianglelefteq G$, $M' = 1$, $A \leq M$, $A \trianglelefteq G$, $M \leq H_\sigma \underset{i_\sigma}{\leq} G$; $\sigma = 1 \cdots s$

(Gaschütz für abelsche NT) L_σ ein H_σ-invariantes Komplement zu A in M:

$$M = A \times L_\sigma \qquad (\sigma = 1 \cdots s)$$

Sei $\Omega \subseteq \ \mathrm{End}_G M$, $A = A\Omega$, $L_\sigma = L_\sigma \Omega$.
Zu jedem $\varphi \in \ \mathrm{Hom}_\Omega(M/A, L_\sigma^G \cap A)$ gebe es genau ein
$\psi (=: \frac{\varphi}{i}) \in \ \mathrm{Hom}_\Omega(M/A, L_\sigma^G \cap A)$.
mit $\psi = \varphi i$, wo $i = \mathrm{ggT}(i_1, \cdots, i_s)$. Das ist z.B. erfüllt, wenn $i = jk$ und
$\exists j^-$ auf A, k^- auf M/A.
Beh: $\exists\ L^* : L^* = L^* G = L^* \Omega$, $M = A \times L^*$
Schreibe M additiv.
Bew:

a) Sei erst σ fest, lasse σ als Index weg:

$$M = A \times L, \quad A = A\Omega G, \quad L = L\Omega H$$

Die Wirkg von $g \in G$ auf M wird beschrieben (nach $m = \begin{pmatrix} a \\ l \end{pmatrix}$) durch
$mg = m\mathcal{M}(g)$, $\mathcal{M}(g) = \begin{pmatrix} g^1 & a \\ g^2 & g^3 \end{pmatrix}$, $g^1 \in \mathrm{Aut}_\Omega A$,
$m = (m\alpha, m\lambda)$
$g_2 \in \mathrm{Hom}_\Omega(L, A)$, $g_3 \in \mathrm{Aut}_\Omega(L)$. Daher für $f, g \in G$

$$\begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ f_2 & f_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ g_2 & f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (fg)^1 & 0 \\ (fg)^2 & (fg)^3 \end{pmatrix},$$

also $(fg)^1 = f^1 g^1$, $(fg)^2 = f^2 g^1 + f^3 g_2$, $(fg)^3 = f^3 g^3$ und für $h \in H : h^2 = 0, (hg)^2 = h^3 g^2$. Alles mit Ω vtb.
Setze $\nu : M/A \to L : (A + m)\nu := m\nu\lambda = (A + m) \cap L$. Dann ν vtb Ω, $g\nu = \nu g^3$ in der Wirkung auf M/A.

G

23/24

Für ein Vertretersystem R von G nach H, also $G = HR$, bilde

$$\rho_R : L \to A : \rho_R = \sum_{r \in R} r^{3^-} r^2 \in \mathrm{Hom}\ _\Omega(L, A)$$

Für ein anderes Vertretersystem S ist $S = hr$, $h \in H, r \in R$ und daher

$$\rho_S = \sum s^{3^-} s^2 = \sum r^{3^-} h^{3^-} h^2 r^2 = \rho_R =: \rho$$

Insbesondere für $S = Rg$ wird

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_r (rg)^{3^-} (rg)^2 = \sum g^{3^-} r^{3^-} (r^2 g^1 + r^3 g^2) \\ &= g^{3^-} \rho g^1 + g^{3^-} g^2 \cdot i \\ g^3 \rho &= \rho g^1 + g^2 \cdot i \quad (\text{wo } i \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

und daher auf M/A

$$g \cdot \nu\rho = \nu g^3 \rho = i\nu g^2 + \nu\rho \cdot g$$

b) Das machen wir für jedes $\sigma = 1 \cdots s$:

Wähle

$$\left.\begin{matrix} z_\sigma \\ j_\sigma \end{matrix}\right\} \in Z : \sum i_\sigma z_\sigma = i; \quad i_\sigma = i \cdot j_\sigma.$$

Dann ist also

$$\begin{aligned} g\nu_\sigma\rho_\sigma &= \nu_\sigma\rho_\sigma g + ij_\sigma\nu_\sigma g^2 \sigma \in \mathrm{Hom}\ (M/A, A), \\ g \underset{\tau_\sigma}{\underset{\downarrow}{\frac{\nu_\sigma\rho_\sigma}{i}}} &= \underset{\tau_\sigma}{\underset{\downarrow}{\frac{\nu_\sigma\rho_\sigma}{i}}} g + j_\sigma \nu_\sigma g^2_\sigma \qquad \sum_\sigma z_\sigma \ldots \end{aligned}$$

MASCHKE

$$g\sum_{\sigma}^{S} z_\sigma\tau_\sigma = \sum_{\sigma}^{S} z_\sigma j_\sigma \nu_\sigma g_\sigma^2 + (\sum_\sigma z_\sigma\tau_\sigma)g$$

Da $\nu_\sigma : M/A \to L_\sigma$ und $l_\sigma g_\sigma^2 + l_L g^{3\sigma} = l_\sigma g$, ist $\nu_\sigma g_\sigma^2 + \nu_\sigma g_\sigma^3 = \nu_\sigma g$ und $\nu_\sigma g_\sigma^3 = g\nu_\sigma$ gibt g
$g(\sum z_\sigma\tau_\sigma + z_\sigma j_\sigma\nu_\sigma) = (\sum z_\sigma\tau_\sigma + \sum z_\sigma j_\sigma\nu_\sigma)g$

$$g\lambda^* = \lambda^* g \text{ mit } \lambda^* := \sum z_\sigma(\tau_\sigma + j_\sigma\nu_\sigma)$$

Also ist M/A^{λ^*} G-invariant: $\lambda^* \in \operatorname{Hom}_\Omega(M/A, A)$ mod A wird $(A+m)\nu_\sigma \equiv m$, also wegen $(A+m)\tau_\sigma \equiv 0$:

$$(A+m)\lambda^* \equiv \sum z_\sigma j_\sigma m = m$$

$L^* := M/A\ \lambda^*$ enthält also genau ein El't aus $A+m$.

Warwick 14.4.78

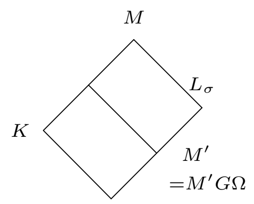
Hauptsatz 1: Verschärfungen: 27

Vor: $M \trianglelefteq G$, $M \leq H_\sigma \underset{i_\sigma}{\leq} G$, $K = K^G \leq M$, für $\sigma = 1\cdots s$ existiert $L_\sigma = L_\sigma^{H_\sigma} : M = K \times L_\sigma$; $i := (i_1, \cdots, i_S)$. Sei Ω ein Bereich von Operatoren auf M mit id $\in \Omega$, $\omega g = g\omega$: $K^\omega \leq K$, $L_\sigma^w \leq L_\sigma$.
Zu jedem $\varphi \in \operatorname{Hom}_\Omega((M/K), \frac{Z(K)}{\Omega})$ gibt es genau ein $\frac{\varphi}{i} \in H$.

$$T \leq \frac{Z(K)}{\Omega} :\Longleftrightarrow T\Omega \leq Z(K)$$

Beh.: $\exists L \leq M : L = L^G \geqq L^\omega \quad \forall\omega \in \Omega$,

$$M = K \times L$$

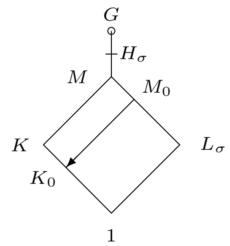


Bew:

a) Sei zunächst $K' = 1$. $M' = K' \times L'_\sigma = L'_\sigma$; $\overline{M} := M/M'$; $\overline{L_\sigma}$ ist ΩH_σ-inv Kplt zu $\overline{K}$ in $\overline{M}$. 23.1: $\exists \overline{L} = \overline{L}\Omega G$, $\overline{M} = \overline{K} \times \overline{L}$
$\overline{L} = L/M'$: $KM'L = M \Rightarrow KL = M$
$KM' \cap L = M' \Rightarrow K \cap L \leq K \cap M' \leq K \cap L_\sigma = 1$.
Dann $\frac{Z(M)}{\Omega} = K =: A$ in Satz 23.1.

25/26

b) Nun sei K beliebig. Es ist $L_\sigma^\omega \subseteq L_\sigma \leq \mathcal{C}_M(K)$ also $L_\sigma \subseteq M_0 := \frac{\mathcal{C}_M(K)}{\Omega}$ (wo $T \subseteq \frac{X}{\Omega} \iff T\Omega \subseteq X$):
$M_0 = M_0^\Omega = M_0^G \subseteq \mathcal{C}_M(K)$, $K_0 := K \cap M_0 = K_0^\Omega = K_0^G \leq$ Ztr K



Nach a) angewandt auf $G, H_\sigma, M_0, L_\sigma, K_0$ $\exists$ L :
$L = L^G = L^\Omega$, $K_0 L = M_0$, $K_0 \cap L = 1$
Es wird $KL = KK_0L = KM_0 = M$, $K \cap L = (K \cap M_0) \cap L = 1$

(1′) Bemerkg: Statt $\frac{Z(K)}{\Omega}$ könnte man auch jedes $X \cap K$ nehmen, wenn $X = X^G = X^\Omega \geq \langle L_\sigma | \sigma = 1 \cdots s\rangle^G$.
z.B. $X = \langle L_\sigma \rangle^G$

(1″) Bem: die Teilbarkeitsbedingung von Satz 1 ist z.B. dann erfüllt, wenn $i = jk$ und $M/K : (M/K)'$ durch j eindeutig teilbar ist sowie $\frac{Z(K)}{\Omega}$ durch k eind. teilbar ist.

FRAGE (2) a) Gibt es Ähnliches für Supplemente?
b) Wie steht es mit der Abhängigkeit des L von $L_1, \cdots, L_s$?

26/27

Zu Maschke S. 23

Bem'en (1) Allgemeiner: Statt $M \trianglelefteq G$ nur vorauss: G wirke auf M

(2) Der Beweis gibt ohne Teilbarkeitsvoraussetzungen zu gegebenen $M = K \times L_\sigma \leq \mathfrak{A}$, $H_\sigma \leq G$ einen G Homom. φ_σ von M in M, nämlich $\varphi_\sigma = (\nu_\sigma z_\sigma \rho_\sigma + z_\sigma j_\sigma \nu_\sigma)$ mit $A \leq \ker \varphi$, $x\varphi \equiv x \cdot i_\sigma$ $(x \in M)$. Konstruktion ist nur mit Projektivitäten wie $lg^2 := Lg^l \cap A$ gemacht, daher auch für recht allgemeinere Systeme $\mathfrak{Z}$ von „zulässigen“ Untergruppen geeignet.
Wenn $L_\sigma = L_\sigma^G$, ist wohl $M\varphi_\sigma = L_\sigma$? Konjugiertheit?

(3) Statt Operatoren Ω kann man auf A eine G-invariante Menge von $n = (1; 2; 3; \cdots)$-stelligen "linearen" Relationen R betrachten: $U, V \subset \mathfrak{Z}, UV = U \times V$,
$(u_1v_1, \cdots, u_nv_n) \in R \Rightarrow (u_1, \cdots, u_n) \in R$.

(4) Man müßte Gaschütz und Maschke in einen Satz vereinigen, die ω brauchten nur auf verschiedenen Obergruppen von M erklärt zu sein, die G-invariant sind.

(5) Teilb. Bed: jeder Primteiler von i invertierbar auf A oder M/A.

27/28

Bem (1) Um Šemektov auf $|G| = \infty$ zu erweitern, sollte man erst Gaschütz für $|G| = \infty$ mit Hilfe von „Sylowgruppen" formulieren.

(2) Ein „Verlagerungssatz analog Gaschütz" steht in XI, 52

28/29

Allgemeiner Gaschütz-Satz

① Vor: Halte fest $A \trianglelefteq G$, $A' = 1$, $A \leq H \underset{n}{\leq} G$. Es gebe C: $H = AC$, $A \cap C = 1$.

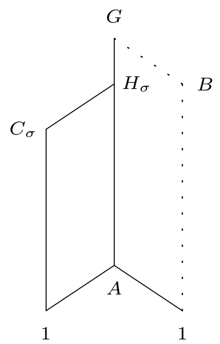
a ⓐ Auf H definiere $\varphi : H \to C : h^\varphi = Ah \cap C$. Dann: $\varphi \in \operatorname{Hom}(H, C)$, $a^\varphi = 1$, $c^\varphi = c$; $\ker\varphi = A$, $\operatorname{im}\varphi = C$.

[Randbemerkung:] besser $\begin{array}{l} G, G_\nu = \ldots \\ C, C_\nu \end{array}$

b ⓑ Für $r, s \in G$ mit $Hr = Hs$ definiere

$$\frac{r}{s} := s^-(sr^-)^\varphi r.$$

Dann $\frac{r}{s} \in A$, $\frac{r}{r} = 1$, $\frac{r}{s} \cdot \frac{s}{t} = \frac{r}{t}$ $(Hr = Hs = Ht)$, $\frac{s}{r} = \left(\frac{r}{s}\right)^-$, $\frac{ra}{r} = a$, $\frac{ar}{r} = r^- ar$, $\frac{rg}{sg} = \left(\frac{r}{s}\right)^g$, $\frac{hr}{r} = h^{(-\varphi+1)r}$



c ⓒ $\mathfrak{R}_\sigma := \{R | R \subseteq G, |H_\sigma g \cap R| = 1\} \ni R, S, T, \dots$
Def: $\frac{R}{S} := \prod\limits_{\substack{r\in R\\ s\in S\\ Hr=Hs}} \frac{r}{s}$. Dann

① $\frac{R}{S} \in A$ ② $\frac{R}{R} = 1$ ③ $\frac{R}{S}\cdot\frac{S}{T} = \frac{R}{T}$ ④ $\frac{S}{R} = \left(\frac{R}{S}\right)^-$ ⑤ $\frac{R}{S} = \frac{T}{U} \Rightarrow \frac{R}{T} = \frac{S}{U}$ ⑥ $\frac{Ra}{R} = a^n$ ⑦ $\frac{Rg}{Sg} = \left(\frac{R}{S}\right)^g$ ⑧ $\frac{Rfg}{R} = \left(\frac{Rf}{R}\right)^g \cdot \left(\frac{Rg}{R}\right)$
⑨ $\frac{aR}{R} = \prod a^n =: a^R$ ⑩ $R_\nu \sim S_\nu \Rightarrow \prod\limits_\nu \frac{R_\nu}{S_\nu} = 1$ ⑪ $\frac{hR}{R} = h^{(-\varphi+1)R}$

[Randbemerkung zu c:] besser $\mathfrak{R}_\sigma$, σ fest, dann gleich ⓕ !
Deutung an monomialer Darstellung? Was nützt ein $R = R^h$?

d ⓓ Ist ν ein G-Endomorphismus von A, so ist $\psi := \psi_{C,R_\nu} : G \to G$, $g^\psi := g\cdot\left(\frac{R}{Rg}\right)^\nu$
$(fg)^\psi = f^\psi g^\psi$, $a^\psi = a^{-n\nu}$, $\ker\psi = \{a | a^{1-n\nu} = 1\}$, $G^\psi \cap A = \{a^{1-n\nu} | a \in A\}$, $A\cdot G^\psi = G$
A. Fix $\psi = \{g | \frac{Rg}{R} \in A^n \ker\nu\}$ $g^\psi \underset{A}{\equiv} g$, $g \in$ Fix $\psi \iff g^\psi = g \iff \left(\frac{R}{Rg}\right)^\nu = 1$; Fix $\psi \cap A = \{a | a^{n\nu} = 1\}$

[Randbemerkung zu d:] Besser ϑ. Bezeichnung paßt nicht zu f

29/30

e ⓔ Wenn $\omega \in Op\ G$, $A^\omega \le A$, $C^\omega \le C$ (daher $H^\omega \le H$), $R \in \mathfrak{R}$ und $R^\omega \in \mathfrak{R}^{⊛}$, so gilt $h^{\varphi\omega} = h^{\omega\varphi}$, $\left(\frac{r}{s}\right)^\omega = \frac{r^\omega}{s^\omega}$, $\left(\frac{R}{Rg}\right)^\omega = \frac{R^\omega}{R^\omega g^\omega}$, $\left(\frac{R}{S}\right)^\omega = \frac{R^\omega}{S^\omega}$.
Ist noch
$$\frac{R^\omega}{R} = 1,$$
so
$$\left(\frac{R}{Rg}\right)^\omega = \frac{R}{Rg^\omega}:$$
und wenn noch $\omega\nu = \nu\omega$ auf A, so $g^{\psi\omega} = g^{\omega\psi}$, also $\omega\psi = \psi\omega$ auf G.
⊛ Für ein $R \in \mathfrak{R}$ gilt: $R^\omega \in \mathfrak{R} \iff HG^\omega = G$, also $R^\omega \in \mathfrak{R} \Rightarrow \mathfrak{R}^\omega \subseteq \mathfrak{R}$; $S^\omega \in \mathfrak{R}\ \forall S \in \mathfrak{R}$.

[Randbemerkung zu e:] besser an den Schluss, vor i.
[Anmerkung vor f:] Besser $\left(\frac{R}{S}\right)^n := \prod \left(\frac{R_\sigma}{S_\sigma}\right)^{n_\sigma}$ $n = (n_1, \dots, n_s)$

f ⓕ Nun seien für $\sigma = 1, 2, \cdots, s$ fest gegeben $A \le H_\sigma \underset{n_\sigma}{\le} G$, $C_\sigma \in$ Kpl(A, H_σ), ferner $R_\sigma \in \mathfrak{R}_\sigma$ und G - Endom. ν_σ von A. Dann gilt für $\frac{R}{S} := \prod \left(\frac{R_\nu}{S_\sigma}\right)^\nu$ *
$$g^\psi := g\left(\frac{R}{Rg}\right)^\nu,\quad \nu := \sum n_\sigma\nu_\sigma (\psi = \psi_{\{c_\sigma R_\sigma \nu_\sigma\}})$$
$$(fg)^\psi = f^\psi g^\psi,\quad a^\psi = a^{1-\sum n_\sigma\nu_\sigma}\ \mathbf{???}, g^\psi \equiv g(A)$$
[Randbemerkung zu f:] hierfür gilt c, nur $\frac{Ra}{R} = a^\nu$

$\frac{R}{S}$ hängt nur von $\{c_\sigma, \nu_\sigma\}$ ab, ψ dazu von $\{R_\sigma\}$, $\psi = \psi_R$.

g ⓖ Wenn es ν_σ gibt mit $a^{1-\sum n_\sigma \nu_\sigma} = a^{1-\nu} = 1\ \forall a$, was z.B. zutrifft, wenn $d := \text{ggT}(n_1, \cdots, n_\rho)$ auf A ein Autom. ist $(a \mapsto a^d)$ mit Inversem δ, $\sum z_\sigma n_\sigma = d$, $\nu_\sigma = z_\sigma \delta)$, so

$$\frac{Ra}{R}(= a^\nu \qquad) = a \qquad \frac{aR}{R} = a^{\sum R_\sigma \nu_\sigma}$$

30/31

Direkter: $B_R := \{g \in G | \frac{Rg}{R} = 1\}$

$\psi \in \text{Hom}(G,G)$, $G^\psi \cap A = 1$, $AG^\psi = G$, $g^\psi = G^\psi \cap Ag$, $B := G^\psi = \text{Fix}\ \psi \in \text{Kpl}\ (A,G)$
[wo $R = (R_1, \cdots, R_s)$ und $R \sim S :\iff \prod \left(\frac{R_\sigma}{\nu_\sigma}\right)^{\nu\sigma} = 1$ auf $\mathfrak{R}/\sim)$] siehe h!
NB: $B = B_{\{C_\sigma, R_\sigma, \nu_\sigma\}}$. Bei $\exists\ d^-$ auf A $B = B_{\{C_\sigma, R_\sigma, z_\sigma\}}$

ⓗ s.u.
ⓘ j s. 32!

k ⓚ Sei Ω eine Menge von Operatoren auf G, so daß für alle $\omega \in \Omega$: $A^\omega \leq A$, $C_\sigma^\omega \leq C_\sigma$, $\exists^* R \in \mathfrak{R} : \frac{R^\omega}{R} = 1$. Seien die ν_σ von ⓖ so wählbar, daß $\nu_\sigma \omega = \omega \nu_\sigma$ auf A. Dann gilt für das ψ von ⓖ: $\psi\omega = \omega\psi$ auf G, also ist $B := \text{Fix}\ \psi = G^\psi \in \text{Kpl}_\Omega(A,G)$.
* das ist stets erfüllt $\forall R \in \mathfrak{R}$, wenn $\forall g \in G \forall \sigma : (H_\sigma g)^\omega \subseteq H_\sigma g$.
es genügt sogar, wenn ω die Nebenkl. $H_\sigma g$ permutiert, d.h. $H_\sigma \cdot G^\omega = G$.

h ⓗ Unter der Vor. von ⓖ gilt: Setzt man $\mathfrak{R} = \{(R_1, \cdots, R_s) | R_\sigma$ Vertretersystem zu $G : H_\sigma\}$, $\frac{R}{T} := \prod\limits_\sigma \left(\frac{R_\sigma}{T_\sigma}\right)^{\nu_\sigma}$, $R \sim T :\iff \frac{R}{T} :\iff \frac{R}{T} = 1^*$, so wirkt G auf $\mathfrak{R}/\!\sim =: \widetilde{\mathfrak{R}}$, A wirkt regulär, und das ist $G^\psi = G_{\widetilde{\mathfrak{R}}}$ für das in ⓖ benutzte $(R_1, \cdots, R_s)$ **???** R.
* $\sim$ hängt nur von c_σ, ν_σ ab.
Ist $\frac{T}{R} = a$, so $T \sim Ra$, $\psi_T = (\psi_R)a$, d.h. $g^{\psi r} = a^- g^{\psi R} a$, $G_T = (G_R)^a$
Kurz: $R \sim S \Rightarrow \psi_R = \psi_S$; $\psi_{Ra} = \psi_R \cdot a$

31/32

i ⓘ Ist $F \leq G$ mit $F \cap H_\sigma \leq C_\sigma$, $R_\sigma \subseteq F$ $(\sigma = 1, \cdots, s)$ so ist $F \leq G_{\tilde{R}} (=: B)$

Bew: $\frac{R_\sigma f}{R_\sigma} = \prod \left(\frac{r}{s}\right)^{\nu\sigma}$ mit $r, s \in F$, also $sr^- \in F \cap H_\sigma \leq C_\sigma$, also $(sr^-)^\varphi = sr^-$, $\frac{r}{s} = 1$
Daher $\frac{R_\sigma f}{R_\sigma} = 1$, $\frac{Rf}{R} = 1$, $f \in G_{\widetilde{R}}$.

k ⓚ Je zwei Komplemente C, C' zu A, deren Schnitte mit H_σ übereinstimmen $(\sigma = 1, \cdots, s)$, sind konjugiert.
Bew: $C, C' \underset{(i)}{\Rightarrow} \exists R, R' :\ C = G_{\widetilde{R}} \underset{G}{=} G_{\widetilde{S}} = C'$

Frage: Projektivität und Injektivität

Geg. Bsp.: 2 Falsch ist die Vermutung: $N \lhd G$, $N \leq$ Ztr G, $N \leq \frac{A}{B} \leq B$. Kpl$(N, A) \neq \emptyset \neq$ Kpl$(N, B) \Rightarrow \emptyset \neq$ Kpl$(N, \langle A, B\rangle)$.

Bsp: $G = C_p \wr C_p$ $N =$ Ztr G, $A = N \cdot \langle$ Zyklus $\rangle$, $B = N \left\langle \begin{pmatrix} \varepsilon & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Geg. Bsp.: 3: Falsch ist: $M \lhd G$, $M' = 1$, $M \leq H \leq G$, $n \in$ Aut $M \Rightarrow |\mathrm{Kpl}(MG) : G| = |\mathrm{Kpl}(MH) : H'|$
Gegenb: $G = C_p \wr C_2$, $M =$ Ztr G, $H = C_p \times C_p$.

32/33

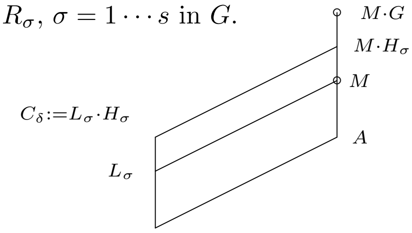
Beweis für halbabelschen Maschke
für Modul mit Op

Gasch.-Satz von Maschke

16.4.78 Warwick (1) G wirke auf die Ω-Gruppe M, Wirkg mit jedem ω vtb. Sei $H_\sigma \underset{i_\sigma}{\leq} G$, $\sigma = 1, \cdots, s$, $i := \mathrm{ggT}(i_1 \cdots i_s)$. Sei $\mathfrak{A} \ni A = A^\Omega = A^G \lhd M$ und $M = A \times L_\sigma$, $L_\sigma = L_\sigma^\Omega = L_\sigma^G$.
Wenn $(a \mapsto a^i) \in$ Aut A, so $\exists\ L = L^\Omega = L^G$:

$$M = A \times L, L = L^\Omega = L^G$$

Bew: Auf das semidirekte Produkt $M \cdot G$ und $C_\sigma := L_\sigma \cdot H_\sigma$ und A wollen wir 29(1) anwenden. Wähle R_σ, $\sigma = 1 \cdots s$ in G.



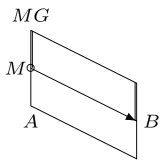
Dehne ω auf MG aus durch $g^\omega = g$, dann $R_\sigma^\omega = R_\sigma$; $C_\sigma^\omega \leq C_\sigma$.
Definiert man wie in 30 $\frac{R}{S}$ durch

$$\left(\frac{R}{S}\right)^i := \prod_\sigma \left(\frac{R_\sigma}{S_\sigma}\right)^{z_\sigma},$$

wo $\sum z_\sigma i_\sigma = i$, so ist $\overline{B} := \{b \in MG | \left(\frac{RG}{R}\right) = 1\}$ ein Ω-Kplt zu A in MG, und nach 32 i ist $G \leq \overline{B}$ (dortiges* F, G, H_σ, C_σ hier $G, MG, MH_\sigma, L_\sigma H_\sigma$).

$$B := \overline{B} \cap M \lhd \overline{B} \geq G \text{ also } B = B^G$$

* es ist $G \cap MH_\sigma = (G \cap M)H_\sigma = H_\sigma \leq C_\sigma$



Den Schnitt zum unabelschen Maschke macht man wohl besser direkt nach 26(b), aber auf Ω achten!

33/34

[Seite 34 ist leer!]

34/35

Unabhängigkeit, Vertauschbarkeit, Faktorisierung

24.4.78 1 Aus $A\wp B$ $(AB = BA)$ folgt $A\wp \begin{cases} (ASA \cap B) & \text{wenn } A \leq G, \\ \langle ASA \cap B \rangle & \text{wenn } B, S \subseteq G \end{cases}$

$\exists$ Anwendung auf $A^x \wp B^y$?

25.4.78

2 A_5 hat nur Faktorisierungen 5.12, 6.10, A_6 hat keine.

3 Sind $A_i \leq G$ $(i = 1 \cdots n)$ unabhängig im Sinne von meiner Arbeit # 82, so

a) $A_i \leq B_i \leq G \Rightarrow \{B_i\}$ unabhängig

b) $A_1 \leq G^* \leq G \Rightarrow \{A_1, A_2^*, \cdots, A_n^*\}$ unabh, $A_\nu^* = A_\nu \cap G^*$.
Bew. a) $\bigcap B_i g_i \supset \bigcap A_i g_i \neq \emptyset$.
$D_i := \bigcap\limits_{i \neq j} A_j \Rightarrow A_i D_i = G$ ($\iff$ $\{A_i\}$ unabh.)
$A_1(A_2^* \cap \cdots \cap A_n^*) = A_1(A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap G^*) = A_1(D_1 \cap G^*) = A_1 D_1 \cap G^* = G \cap G^* = G^*$
$A_2(A_1 \cap A_3^* \cap \cdots \cap A_n^*) = A_2(A_1 \cap G^* \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = A_2(D_2 \cap G^*) = A_2 D_2$ da $D_2 \leq A_1 \leq G^*$
für $n = \infty$ siehe 36.

$3'$ Gibt es Gegenbeispiele zu b) für $n = \infty$? Nein! 36.

35/36

Unabhängigkeit der $A_i \leq G$, $i \in I$

1 Def: $\{A_i\}$ un $G :\iff \bigcap\limits_i A_i g_i \neq 0 \ \forall\ g_i \in G$

Für $J \subseteq I$: $A_J := \bigcap\limits_j A_j \quad A_\emptyset := G$

2 Sei im folgenden $\{A_i\}_{i \in I}$ unabh $GJ \subseteq I \Rightarrow \{A_j\}$ un G

2a $\{J_\alpha\}$ disjunkte Teilmengen von $I \Rightarrow \{A_{J_\alpha}\}_\alpha$ un G

3 $A_J \cap A_K =: A_{J\cup K}$

4 $A_J A_K = A_{J\cap K}$
Bew: oBdA $J \cup K = J, J \cap K = \emptyset$ $g \in G \Rightarrow A_J g \cap A_K \neq \emptyset$
$a_J g = a_K, g \in A_J A_K = G$

5 $\bigcap A_i g_i$ ist Nebenklasse von A_I.
Bew: $A_I \bigcap = \bigcap$ klar. $g, h \in \bigcap A_i g_i \Rightarrow gh^- \in A_i, A_I$
$\bigcap B_i g_i \supseteq \bigcap A_i g_i \neq \emptyset$.

6 $A_i \leq B_i \leq G \Rightarrow \{B_i\}$ un

7 $A_1 \leqq G^* \leq G$, $A_j^* := A_j \cap G^* \quad (j \neq 1) \Rightarrow \{A_1, A_j \quad j \neq 1\}$ unabh. G^*
Bew:

$$\begin{aligned} A_1 g_1^* \cap \bigcap_{j\neq 1} A_j^* g_j^* &= A_1 g_1^* \cap \bigcap (A_j g_j^* \cap G^*) \\ &= A_1 g_1^* \cap G^* \cap \bigcap A_j g_1^* \\ &= A_1 g_1^* \cap \bigcap A_j g_i^* \neq \emptyset \end{aligned}$$

KRITERIUM:

8 Sei $A_i \leq G$, $|I| < \infty$. Dann $\{A_i\}$ un $G \iff \forall_i \; A_i A_{I-i} = G$
Allgemeiner gilt für $|I| = \infty$: 37

36/37

noch Unabhängige $|G : A_i|$

1 Ist $A_i \leq G$ $(i \in I)$ und für jedes endliche $J \subseteq I - \{i\}$ $A_i A_J = G$, so sind die A_i schwach unabhängig in G in dem Sinn:
Für $F \subseteq I$, $|F| < \infty$ ist für jede Wahl von $g_f \in G$ $(f \in F)$ stets $\bigcap_{f\in F} A_f g_f \neq \emptyset$.
Bew: $|F| = n$, min Gegenbsp: $n > 1$.
nein: $\exists h \in A_1 g_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}\, g_{n-1}$
$g_\nu h^- \in A_\nu \quad \nu = 1, \cdots, n-1$
$g_n h^- \in G = A_n D, \quad D := A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}$
$g_n h^- = a_n d$
$A_1 g_1 h^- \cap \cdots \cap A_{n-1} g_{n-1} h^- \cap A_n g_n h^-$
$= A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap A_n d$
$= (A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap A_n) d$

Aufgabe 2 Für schwache Unabh. übertragen S. 35.

Winkelfeld
Angular field (AF)

12.5.78 Dr.? Neumann, University of Nottingham, fragte heute telephonisch, wann $\mathrm{AF}(A^2) \subseteq (\mathrm{AF}(A))^2$?
Hängt vielleicht mit meinem **???**
Valley theorem zusammen!

Lit über Büschel hermitescher Matrizen (Bohnenblust etc) Uhlig Sond. 1979

$(1')$ $|G| = p^\alpha q^\beta$, $H \le G$, $p^\alpha \big| |H|$, G einfach
$\Rightarrow H$ hat nur p-Füße.

Cosubnormalität
Ein Kriterium für Subnormalität

Forts. von XV 201
12.5.78

$\underline{\underline{1}}$ Hilfssatz: $G = AB$ (endlich). $B \in \mathfrak{G}_p \Rightarrow O_p(A) \trianglelefteq O_p(G)$.
Bew: $\exists\ A_p \in p$-Syl $A : P := AB \in p$-Syl G.

$$[O_p(A)]^G = [O_p(A)]AB = [O_p(A)]^B \le A_p^P \in \mathfrak{y}_p$$

$(1')$ siehe 38

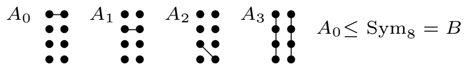
Satz 2 Sei $G = \langle A_0, \overbrace{A_1, \cdots, A_n}^{\text{csn}}\rangle$, A_0 csn A_i $(i = 1, \cdots, n)$
A_i sn $B := \langle A_1, \cdots, A_n\rangle, \exists_A : G = AB$ mit A_0 sn A.
Dann A_0 sn G.
Bew:

(1) Sei $N := \langle A_0^{\mathfrak{N}}, \underline{A}_1^{\mathfrak{N}}, \cdots, A_n^{\mathfrak{N}}\rangle > 1$
Dann $G/N =: \overline{G}$ Induktion $|G| : A_0N$ sn G.
Nach XV 196_3 ist A_0 sn $\langle A_0, A_1^{\mathfrak{N}}, \cdots, A_n^{\mathfrak{N}}\rangle = A_0N$ sn G.

(2) Sei $N = 1$, also $A_i \in \mathfrak{N}$ und es gelte $p \ne q \in U_\pi(A_i)$
$1 \ne P := \langle A_0^{p'}, \cdots, A_n^{p'}\rangle$; es ist $A_i^{p'} \in \mathfrak{G}_p$, $\mathcal{N}(A_0^p) \ge A_0, A_i^{p'}, P$
$A_0^p \trianglelefteq A_0P$ sn G. (Indukt. $|G|$); A_0^p sn G.
Ebenso A_0^q sn G, $A_0 = A_0^p \cdot A_0^q$ sn G.

(3) Sei $N = 1$, alle $A_i \in \mathfrak{G}_p$. Dann $B \in \mathfrak{G}_p$.
Nach $\underline{\underline{1}}$ ist $A_0 \le O_p(A) \le O_p(G)$. A_0 sn G.

Gegenbsp. 3 $A_1, \cdots, A_n$ paarweise csn statt $\{A_1, \cdots, A_n\}$ csn genügt nicht:



G
39/40

noch Kosubnormalität

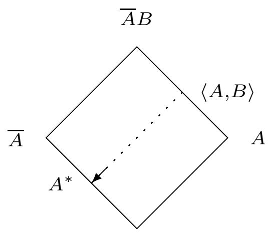
Satz 4 Sei $\{A_1, \cdots, A_m\}$ csn G, $\{B_1, \cdots, B_n\}$ csn G, $\{A_\mu, B_\nu\}$ csn G, $A \leq \langle B_1, \cdots, B_n, A_1, \cdots, A_m\rangle : A_\mu$ sn A; $A \wp B := \langle B_1, \cdots, B_n\rangle$.
Dann $A_1, \cdots, A_m \in$ sn G
Bew:

I $N := \langle A_1^{\mathfrak{N}}, \cdots, B_n^{\mathfrak{N}}\rangle > 1 : A_1$ sn $\langle A_1, A_2^{\mathfrak{N}} \cdots B_n^{\mathfrak{N}}\rangle$ sn G.

II $A_\mu, B_\nu \in \mathfrak{N}$; $p, q \in U\pi(A_\mu) \cup U\pi(B_\nu)$: wie 39 $\underline{2}$ (2)

III $A_\mu, B_\nu \in \mathfrak{G}_p : A_\mu \leq O_p(A) \leq O_p(AB) = O_p(G)$.

5 Sei A sn $\overline{A}$, $\overline{A} \wp B$. A_i sn $A = \langle A_i\rangle$, B_k sn $B = \langle B_j\rangle$. Dann A csn $B \iff A_i$ csn B_j
Bew: Auf $A^* := \overline{A} \cap \langle A, B\rangle$ statt A wende 4 an.



(uralt) 6 $\mathfrak{F}$ Fitting-Formation, $A \overset{\wp}{\text{csn}} B \Rightarrow (AB)^{\mathfrak{F}} = A^{\mathfrak{F}} B^{\mathfrak{F}}$

Das hat schon Allgemeiner: X csn A_i, $A_i \wp B_k \Rightarrow X$ sn $\prod A_i$;
=MAIER 7 $X, A, B \leq G =$ endlich, X sn A, X sn B, $AB = BA$, $X \in \mathfrak{S}$
(bemerkt $\Rightarrow X$ sn AB.
31.10.78) Bew: 42
BOL SOC BRAS MAT 8(1977), 127-130
$= 41_4$, 42_6
Verallg. S. 105

Vermutung: $X \in \mathfrak{S}$ entbehrlich. Stimmt: 104

$$\text{Gleichw:} \quad \left.\begin{array}{c} A \text{ sn } AB \\ A \text{ sn } AC \\ B \wp C \end{array}\right\} \Rightarrow A \text{ sn } ABC, \text{ denn } A, B, C \text{ paarweise } \wp.$$

Verallg. S. 105

40/41

Faktorisierte Gruppen
Kriterium für Subnormalität

12.5.78 1 Hilfss: $G = AB \Rightarrow \langle O_p(A), O_p(B)\rangle \in \mathfrak{G}_p$
Bew: $\exists\ A_p \in p$-Syl A, $B_p \in p$-Syl B: $O_p(A)O_p(B) \subseteq A_pB_p \in \mathfrak{G}_p$

1a Bem: bei Kegels Problem überträgt sich Vor. auf $A \cap B$ wenn $A \wp B$ aber $A^g \not\leq M \Rightarrow A$ nicht $\wp A^g$.

Vermutung:

Vermutg 2 Sei $A, B \leq G = \overline{A}\,\overline{B}$, A sn $\overline{A}$, B sn $\overline{B}$.
Sei A_i sn $A = \langle A_i\rangle$, B_k sn $B = \langle B_k\rangle$. Dann A csn $B \iff A_i$ csn B_k.
Bew: $\Rightarrow$ klar. $\Leftarrow$: I:
Sei $N = \langle A_i^{\mathfrak{N}}, B_k^{\mathfrak{N}}\rangle > 1$?

Satz 3: $\begin{cases} D := A \cap B \\ G = AB \end{cases} \Rightarrow O_p(A) \cap O_p(B) \overset{\text{weil } O_p(G)\cap A \leq O_p(A)}{=} O_p(G) \cap D$. Anwendbar auf $p^\alpha q^\beta$?
Bew: $O_p(A)$ csn $O_p(B)$ (1)
ebenso $O_p(A^g)$ csn $O_p(B^h)$
$R := O_p(A) \cap O_p(B)$: R sn $O_p(A)$ csn $O_p(B^g) \rhd\rhd R^g$
R csn R^g R sn G $R \leq O_p(G)$

FRAGE 4 $G = BC$, A sn B, A sn $C \overset{?}{\Rightarrow} A$ sn G
ja s. 40_7, 104

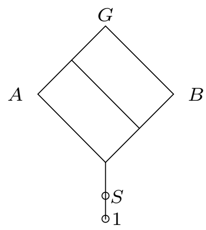
41/42

Satz 5 $G = AB$, $D := A \cap B \Rightarrow \overset{:= \text{Fitt}(A)}{A_{\mathfrak{N}}} \cap B_{\mathfrak{N}} = D \cap G_{\mathfrak{N}} = D_{\mathfrak{N}} \cap G_{\mathfrak{N}}$
Bew: 41.3 FRAGE: Ähnlich für $G = BAB$?
Frage: entsprechend für $\mathfrak{S}$ statt $\mathfrak{N}$.

Inverness Thm (von Maier 40_7)

Satz 6 $G = AB$ (endlich), $S \in$ sn $A \cap$ sn $B \cap \mathfrak{S} \Rightarrow S$ sn G.
Gegenbsp. $|G|$ min, $|G : A| + |G : B|$ min

(a) $A \lessdot G$, $B \lessdot G$
(b) $A_G = 1$ sonst $\overline{G} = G/A_G$, $\overline{S}$ sn $\overline{G}_p$, S sn SA_G sn G.



(c) $\begin{cases} S > 1, \text{ daher} \\ \exists\ p \quad S_p \quad (:= O_p(S)) > 1 \end{cases}$

(d) $G_p > 1$, 41.3 (sogar $S_p \leq G_p$)

(e) $\exists\ P \cdot\!\lhd G$, $|P| = p^\alpha$, $P' = 1$, $AP = G$**???**

(f) $P = O_p(G) = C_G(P)$. Denn $[P, O_p(G)] = 1$ und G treu pri $G : A$, P regulär abelsch $= \mathcal{C}(P)$.
oder (f') s.u.

(g) $1 < S_p \leq O_p(G) = P$, also $A \cap P > 1$ Wid.

NB 6′ In einem Gegenbeispiel zur entsprechenden Vermutung für beliebiges S mit $|G| = \min$ und $N \cdot\!\lhd G$ ist soc $S =$ soc$'S$, $G = NA = NB$: [Denn $N \wp {}^{A}_{B}$, daher $(NA \cap B)(NB \cap A) = NA \cap NB$. Wäre dies $< G$, so S sn $NA \cap NB$, S sn NS sn G Wid.]
Und N normalisiert keine Untergruppe $\neq 1$ von $A \cap B$,
Folge: Fitt $S = 1$ und $S = S'$ einfach.

f' $P \leq$ Ztr $O_p(G) \leq C(G_p)$ entgegen $\downarrow$.

[Der gesamte Text auf dieser Seite ab Satz 6 ist nachträglich mit Bleistift durchgestrichen.]

42/43

Faktorisierte Gruppen

23.5.78

(1) $G = AB$, $A_p \in p$-Syl A, $B_p \in p$-Syl $B \Rightarrow \exists\ G_p \leq \langle A_p, B_p \rangle$. Genauer: $\exists\ x \in \langle A_p, B_p \rangle : A_p^x \cdot B_p =: G_p \in p$-Syl G.
Bew: $\exists\ x \in \langle A_p, B_p \rangle$. $\langle A_p^x, B_p \rangle \in \mathfrak{G}_p$. Nun ist $A_p^x \in p$-Syl A^x,
$B_p \in p$-Syl B^y, $G = A^x B^y$ also $G_p := A_p^x \cdot B_p \in p$-Syl G
$G_p \leq \langle A_p, B_p \rangle$.
Analog für $G = A^1 A^2 \cdots A^n$, $A^\rho \wp A^\sigma$.

NB Das enthält den entsprechenden Satz für $G = \langle A^1, \cdots, A^n \rangle$, A^ν sn G.
Bew Gegenb. mit n min hat $n = 2$: betrachte $A_p^B \cdot B$
Frage: Entsprechend für beliebige „Vertauschbarkeits-Produkte“?

(2) $G = AB$, $D := A \cap B$, $D_p \in p$-Syl D, $N := \mathcal{N}_G D_p \Rightarrow N = (N \cap A)(N \cap B)$
Bew: $ab^- \in N \Rightarrow D_p^a = D_p^b \in p$- Syl $D = D_p^{a^-}, \exists d \in D$
$D_p^{ad} = D_p^{bd} = D_p$ $ad, bd \in N$.
$ab^- = (ad)(bd)^- \in (N \cap A)(N \cap B)$
Allgemeiner:

Satz 3 $G = AB$. R_i G-inv. Relat; je zwei Lösungen von C max (oder min) mit $C \leq G, CR_iA$ $(i = 1 \cdots k)$, CR_jB $(j = k{+}1, \cdots, n)$ seien unter $D := A \cap B$ konjugiert; $N := \mathcal{N}_G C$. Dann

$$N = (N \cap A)(N \cap B)$$

43/44

4 $G = AB$; $A, B, C \leq G$, $C \underset{\underset{\text{vtb}}{\uparrow}}{\wp} A$, $C \wp B \Rightarrow$ entsprechend zerfällt

$CA \cap CB = (CA \underset{\underset{\leq G}{|}}{\cap} B)(CB \underset{\underset{\leq G}{|}}{\cap} A)$

Allgemeiner:

5 Sind $A, B \leq G$ und $C \subseteq G$, so $(CA \cap B)(BC \cap A) = \underbrace{CA \cap BC \cap BA}$

Folge: Das ist, wenn $A \wp B \wp C \wp A$, symm in ABC!

5′ $G = A \cdot B$; $A, B \leq G$; $C \subseteq G$, $C \wp^A_B \Rightarrow (CA \cap B)(BC \cap A) = CA \cap BC$

6 $G = AB$, $\Sigma := \{S \leq G | S \text{ sn } A, S \text{ sn } B\}$
$S^{ab} \in \Sigma \Rightarrow S^a \in \Sigma$
Bew: S^{ab} sn $B \Rightarrow S^a$ sn B; klar: S^a sn A

44/45

2-tra Normalteiler

6.7.78

Satz 1 Sei G Pgr auf Ω, $G_0 = H$, $N \lhd G_0$, N tra $\Omega_0 := \Omega - \{0\}$
Sei $V \subseteq N$, $1^V = \Omega_0$ (vielleicht genügt $0^{V^G} = \Omega$). Sei $t \in G \setminus G_0$, $0^{t^-} =: 1$.
Dann

<u>A</u> Dann äquivalent:

I. $\exists\ K \lhd G$, $K \cap H = N$

II $N^{tH}.N^t \cap H \subseteq N$ NB: $N^{tH} = N^{tN}$

A'. Ist G 3-tra oder $Z(H/N) = 1$, so ist auch äq: [nachträglich mit Bleistift eingefügt]

III $V^{tH}V^t \cap H \leq N$ [nachträglich mit Bleistift gestrichen]

IV $w^{th}w^{-t} \in H \Rightarrow\ \in N\ \forall h\ \forall w \in VV^-$
d.h. $[h, v] \cap H \leq N$

B Ist diese Bedingg erfüllt, so $H^G =: K = K_0 K_\alpha + K(0 \mapsto \alpha)$ f alle $\alpha \neq 0$; wenn also $g : 0 \mapsto \alpha \mapsto \beta \neq 0$, so $K = NN^g + N(\alpha \mapsto \beta)^{g^-}$

Bew: A: IV $\to$ I: $1 := 0^{t^-}$; $r_0 := 1$; $r_\alpha := t^- v_\alpha$ $(\alpha \in \Omega_0)$ mit $1^{v_\alpha} = \alpha, v \in V$.

a) für $s := v^{-t}$ gilt stets: $\underline{h, h^s \in H \Rightarrow h^s \equiv h}$
Bew: $h^- h^s = h^- v^t h v^{-t} = v^{th} v^{-t} \in H, \in N$.

b) $\underline{n^g \in H \Rightarrow n^g \in N}$ B: $\exists v : g = n' v^{-t} h = n' s h$

c) H const mod N auf $\Omega_0 := \Omega - \{0\}$
$h : \alpha \to \gamma$ $h_\alpha := r_\alpha h r_\gamma^- = t^- u_\alpha h v_\gamma^{-t} = (nh)^t$
$\beta \to \delta$ $h_\beta = r_\beta h r_\delta^- = t^- u_\beta h v_\delta^{-t} = (n'h)^t$
aus $t^- nht \in H$ folgt $t^- n' n^- t \in H$
nach b) $t^- n' n^- t \in N$, $(n'h)^t = (n^t n^- . nh)^t \equiv (nh)^t$

d) $\alpha, \beta \in \Omega_0$, $g \in G_{\alpha\beta} \Rightarrow g_\alpha \equiv g_\beta$ B: $g_\beta^- g_\alpha = v^{th} v^{-n}$ mit $v = v_\beta v_\alpha^-$
$h = g_\beta$

d′) II $\to$ I folgt aus

$$\begin{aligned} \alpha\beta\ \gamma = \alpha^g\ \delta = \beta' \in \Omega_0 \Rightarrow g_\beta^- g_\alpha &= h^- t^- v_\alpha v_\beta^- t h . t^- v_\delta v_\gamma^- \\ &= (v_\alpha v_\beta)^{th} . (v_\delta v_\gamma^-)^t \end{aligned}$$

45/46

e) Ist $Z(H/N) = 1$, so G konst mod N auf Ω_0 $g : (\alpha\beta) \to (\gamma\delta)$ führt $G_{\alpha\beta}$ in $G_{\gamma\delta}$ über
In $G_{\alpha\beta}$ kommt $\begin{pmatrix} \overline{h} & \\ & \overline{h} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \alpha \\ \leftarrow \beta \end{matrix}$ für jedes $h \in H$ vor ($\overline{h} = hN/N$).
Das wird transfr. von g in $\begin{pmatrix} \overline{h}^{g_\alpha} & \\ & \overline{h}^{g_\beta} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \gamma \\ \leftarrow \delta \end{matrix}$ also $\overline{h}^{g_\alpha} \equiv \overline{h}^{g_\beta}$,
$\overline{h}^{g_\alpha \overline{g}_\beta} \equiv \overline{h}$, $g_\alpha g_\beta^- \in \mathcal{C}(\overline{h})$, $g_\alpha g_\beta^- \in Z(H/N)$; $g_\alpha \equiv g_\beta$. Weiter wie MZ.

f) G 3-tra $\Rightarrow$ H 2-tra wie MZ.
Bew. B: $\alpha \neq 0 \Rightarrow K = K_0 K_\alpha + K(0 \to \alpha)$ denn

$$0^k = \beta \neq \alpha \Rightarrow \begin{cases} \beta = 0 & k \in K_0 \subseteq K_0 K_\alpha \\ \beta \neq 0 & \exists k_\alpha : 0 \to \beta \end{cases}$$

$$k k_\alpha^- : 0 \to 0 \quad k k_\alpha^- = k_0 \ \ k = k_0 k_\alpha$$

NB: Wenn H/N abelsch folgt aus IV stets $h^g \in H \Rightarrow h^g \equiv h$
Bew: $g = nsh'$; (a)

46/47

Ein Gegenstück zum perf. Kern

8.7.78 (1) ist $\bigcap N, \quad N \lhd G$, Ztr $G/N = 1$

<u>FORTSETZG. 2-tra NORMALT: (S. 46)</u>

Sei $N \lhd H = G_0$, N tra $\Omega_0 := \Omega - \{0\}$.
Vert. $R := \{1, t^- n_\alpha | \alpha \in \Omega_0\}$, $0^{t^-} =: 1$, $1^{n_\alpha} = 0$.
Für die hierdurch definierte mon Darst. von G nach H/N, gilt

(2) G „hinten“ (auf $\Omega_0 \times \Omega_0$) konstant $\iff$

$$\forall_h N^{th} N^t \cap H \subseteq N \iff N^{tN} \cdot N^t \cap H \subseteq N$$

$$\underset{\forall \beta}{\iff} N(a)N(\beta) \cap H \subseteq N$$

(3) H hinten konstant $\iff$ N auf Ω konstant
$\iff$ $N^t \cap H \subseteq N \underset{\forall g \in G - H}{\iff} N^g \cap H \subseteq N$.
$\iff$ $G_{0,1}/N_{0,1}$ erleidet nur innere Aut. unter $G(0,1)$
$\iff$ $\exists\ s \in G(0,1) - G_{0,1} : s \in \mathcal{C}(G_{0,1}/N_{0,1})$ (d.h. $g_{0,1}^s \equiv g_{0,1}$)

47/48

“Lange“ Normalteiler einer P-Gr.

9.7.78 (1) Def: $L \leq G <$ Sym Ω (G tra) heiße eine lange Untergruppe, wenn $\forall \alpha, \beta \in \Omega$:

$$(\alpha, \beta)^L = (\alpha\beta)^G \text{ [dh: } G \leq L^{(2)}]$$

Zur Bestimmung der langen Normalteiler:

(2) Sei G tra $\Omega \ni 0$, $N \lhd H := G_0$. Sei $R = \{r_\alpha | \alpha \in \Omega\}$ ein Repr. Syst. von $G : H$ mit $0^{r_\alpha} = \alpha$. Dann

a) Bei der mon Darst. von G mittels $H/N =: \overline{H}$ hat genau dann für jedes Paar $\underline{(\alpha, \beta)} \in \Omega_0 \times \Omega_0$ die Gruppe $G_{\alpha\beta}$ an der Stelle (α, α) die <u>volle</u> Koeff Gr $\overline{H}$, wenn $\forall \beta \in \Omega_0 : \beta^{G_0} = \beta^N$ [d.h. $G_0 \leq N^{(1)}$].

b) Ist diese Bedgg erfüllt und* Ztr $\overline{H} = 1$ und $\{[h, r_\alpha \gamma_\beta^-] \mid \alpha, \beta \in \Omega_0, h \in H\} \cap H \subseteq N$, so ist die Darstellung jedes $g \in G$ „hinten konstant“, daher gibt es $K \lhd G$ mit $HK = G$, $H \cap K = N$
* allgemeiner: stets $\exists Y \lhd G : HY = G, H \cap Y = ZH \mod N$
Bew: a) Die Koeff Gr in (α, α) in H von $G_{\alpha\beta}$ ist $G_{\alpha\beta}^{r_\alpha^-} = G_{0\beta^{r_\alpha^-}} = G_{0\gamma}$; aber

$$\overline{\text{Koeff Gr}} = \overline{H} \iff G_{0\gamma} \cdot N = G_0 \iff \gamma^N = \gamma^{G_0} = \gamma^H$$

48/49

Bew b) Die Kommutatorbedingg bedeutet:
$\alpha, \beta \in \Omega_0 \; g \in G_{\alpha\beta} \Rightarrow g_\alpha \equiv g_\beta$
Ist nun $l \in G$, $(\alpha, \beta)^l = (\gamma\delta)$; $\alpha\beta\gamma\delta \in \Omega_0$ so $(g^l)_\gamma = g_\alpha^{l_\alpha}$, $(g^l)_\delta = g_\beta^{l_\beta}$,
also $g_\alpha^{l_\alpha} \equiv g_\beta^{l_\beta} \equiv g_\alpha^{l_\beta}$
$g_\alpha^{l_\alpha l_\beta^-} \equiv g_\alpha$
$l_\alpha l_\beta^- \in \mathcal{C}(H/N) = N$.

NB 1) Es wird genügen, die Kopplungsbedingung $g_{\alpha\beta} \equiv g_\gamma\delta$ für N und ein Erzeugendensystem von H/N zu fordern.

2) Nützen Elemente g von Minimalgrad?

3) Ausführlich behandeln

   1) H/N abelsch
   2) $Z(H/N) = 1$.

4) Wenn man Šemetkov verallg. will, muß man erst Gaschütz$_\infty$ für „Sylowgruppen“ formulieren

5) Meine Supplementformel aus OW ausdehnen auf Gaschütz?

49/50

[Seite 50 ist leer!]

50/51

p
von XIII 82, 245 Forts: Untergruppen vom Index p: Konj.

5.9.78
$\varepsilon^p = 1$, $j = \frac{kl}{p-1} = \frac{Kx \cdot Ly}{p-1} = xy = \kappa\overline{\kappa}$, $(x, y) = 1$

(1) Wahrscheinlich ist die Galoisgruppe von $Q(\varepsilon) \cdot Q(\kappa)$ isomorph zu

$$(\mathcal{N}G_p)/G_p, |G_p| = p,$$

hat also ungerade Ordnung. Das heißt wohl, daß bei richtiger Normierung die Verkettungsmatrix mit ungerader Zeilensumme die Spur 0 hat.

(2) Jeder Primteiler $q|j$ ist sogar 2^n-ter Rest wenn $2^n|p-1$, insbes. also quadratischen Rest mod p. Denn für $\mathfrak{q} \mid \kappa$, $\mathfrak{q}$ Primideal in $Q(\varepsilon)$ gilt $\mathfrak{q} \neq \overline{\mathfrak{q}}$ (sonst jedes $\mathfrak{q}^\sigma = \overline{\mathfrak{q}}^\sigma$, $\mathfrak{q}^\sigma$ oder $\overline{\mathfrak{q}}^\sigma$ teilt κ, jedes teilt κ, $q|\kappa$ Wid.
Also $\begin{cases} \mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1\mathfrak{q} \cdots \mathfrak{q}_e \\ \text{Grad } \mathfrak{q} =: f \text{ ungerade} \end{cases} \quad \Rightarrow e_2 = (p-1)_2, \; \varepsilon^p = 1, \; p \big| q^f - 1$
Ord $\mathfrak{q}$ mod p ist ungerade, q ist 2^n-ter Rest mod p.

Im Folgenden wird bis auf weiteres die Situation von 4 Darstellungen $\alpha\beta\gamma\delta$ von G durch Perm-Matrizen vom Grad p betrachtet, die alle auf $P \in p$-Syl G übereinstimmen und zu denen es (primäre) Matrizen $KL \in Z \times P$ gibt mit

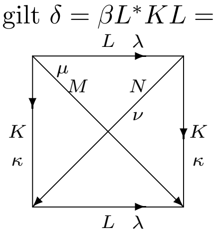
51/52

noch Grad p: Konjugiertheit

1*

$$\begin{tikzcd} \alpha \arrow[r, "L_{j_1}"] \arrow[d, "j_1 K"'] & \beta \arrow[d] \\ \gamma \arrow[r, "L"'] & \delta \end{tikzcd}$$

(d.h. $\beta(g) = L^{-1}\alpha(g)L$ usw.). Dann gilt $\delta = \beta L^* KL = \beta K$, also



und bei passender Normierung von M, N (notfalls durch $J-M$ zu ersetzen, usw) gilt:
$\kappa\overline{\kappa} = K$ hat Zeilensumme k, $\frac{k(p-k)}{p-1} = j_1 = \kappa\overline{\kappa}$, $KL = zM + tJ$
$L = \lambda\overline{\lambda}$ hat Zeilensumme l, $\frac{l(p-l)}{p-1} = j_2 = \lambda\overline{\lambda}$, $KL^* = zN + tJ$
$\mu\overline{\mu} = M$ hat Zeilensumme m, $\frac{m(p-m)}{p-1} = j_3 = \mu\overline{\mu}$, $NL = L^*M = xK + rJ$
N hat Zeilensumme n, $\frac{n(p-n)}{p-1} = j_3' = \nu\overline{\nu}$, $KN^* = K^*M = yL + sJ$
mit $x, y, z, r, s, t \in \mathbb{N}$. Für die Ewe gilt daher

$$\begin{aligned} \kappa\lambda &= z\mu, \kappa\overline{\lambda} = z\nu \\ \nu\lambda &= \overline{\lambda}\mu = z\kappa \\ \kappa\overline{\nu} &= \overline{\kappa}\mu = y\lambda \end{aligned}$$

$$j_1 = yz \qquad j_2 = xz \quad j_3 = xy$$

(2) $*$ Diese Situation tritt z.B. stets auf, wenn G mit einem Automorphismus σ, der P invertiert, 2 nichtisomorphe Perm. Darst. $\alpha \underset{L}{\to} \beta$ hat: setze

$$\begin{cases} \delta := \sigma\alpha T \\ \gamma := \sigma\beta T \end{cases} \quad (T \in \mathcal{N}_{\mathfrak{S}_p} P \text{ invertiere } P),$$

dann

$$\gamma L = \sigma\beta T L = \sigma\beta L^* T = \sigma\alpha T = \delta$$

p

Vor. von 52(1)
$\downarrow$
3 $\circledast$ Es ist $j_2|j_3$ wegen $j_3\lambda^2 = j_2\mu\overline{\nu}$ (da λ^2 keinen natürlichen Teiler $\neq 1$ hat), ebenso

Forts. 65 $\quad j_1|j_3$ wegen $j_3\kappa^2 = j_1\mu\nu; z|x, z|y, z^2|j_i \quad (i = 1, 2, 3)$

(4) $\circledast$

$$\begin{array}{rcll} K(L+L^*) & = & z(M+N)+tJ & \kappa(\lambda+\overline{\lambda}) = z(\mu+\nu) \\ K(L-L^*) & = & z(M-N) & \kappa(\lambda-\overline{\lambda}) = z(\mu-\nu) \\ L(N-M^*) & = & x(K-K^*) & \lambda(\nu-\overline{\mu}) = x(\kappa-\overline{\kappa}) \\ L(N+M^*) & = & x(K+K^*)+2rJ & \text{hermitesch, daher} \end{array}$$

$$\lambda(\nu+\overline{\mu}) = \chi(K+\overline{u}) \in \mathbb{R}$$

usw.
$\exists n : (\mu, n) = 1$
$j_1 = n^2\mu \ j_2 = n^2\sigma \ j_3 = n^2\mu v$ folgt aus 63.27

5 Vor. $\circledast$: Wegen $j_2|j_3$, $i = 1, 2$ ist $j_i \leq \frac{j_3}{2} \leq \frac{p+1}{8}$, also $\frac{k}{l} < 0.15p$.
Ist $j_1 \leq j_2$ etwa, so $j_1 \leq \frac{j_3}{3}$ $k < 0,092p$.

6 Sogar ohne Vor. ① allein aus $j_1j_2 = z^2j_3$ folgt mit $j_i = \frac{p^2-s_i^2}{4(p-1)}$, also $2k = p - s_1$ usw. $(s_i > 0)$ Prüfe
$j_1 + j_2 + a_3^2 = j_3' + z^2$ mit $j_3' := \frac{p^2-s_3'^2}{4(p-1)}$ $(> 0?!)$, $s_3'^2 := b_3 + 2a_3$
$b_3 := \frac{s_1s_2+2s_3z}{p} > 0$, $a_3 := \frac{zs_3-b_3}{p}$
NB: Bei $j \equiv s^2\frac{p+1}{4} \mod p^2$

NB: Bei $j_3' < 0$ ist $x = y < z$, $j_3 < \begin{cases} j_1 \\ j_2 \\ \frac{z^2}{4} \end{cases}$

Es ist $s_3' \equiv zs_3 \mod p-2$,
$s_1s_2 + 4a_3 \equiv 0$ 〃 〃
und allgemein $j \equiv 1 - \frac{s^2}{p^2} \mod (p-2)^2$
$j \equiv \frac{s^2-1}{8} \mod p+1$

FRAGE 6′ What about relations between j_1', j_2', j_3'?

p + regul. abelsche Ugr.

7 Die Hermitizität von $L(N + M^*)$ bedeutet Vertauschbarkeit der ganzz. nichtneg. **???**Matrizen.
LT, $(N^* + M)T$ wo $T \in \mathcal{N}P, P^T = P^-$
Sie können also simultan diagonalisiert werden, die EWe sind
$\pm|\lambda|, \pm|\overline{\nu} + \mu|$.

8. $k < \frac{p}{2} \Rightarrow \frac{k}{2} < j < k$ wo $j = \frac{k(p-k)}{p-1}$ genauer $k(1 - \frac{k}{p}) < j < k(1 - \frac{k-1}{p})$

9 Für jeden Körper $K : \mathbb{Q} \leq K \leq \mathbb{Q}(\varepsilon)$, $\varepsilon^n = 1$ ist $\underset{K \to Q}{\mathcal{N}(\mathfrak{a})} \equiv 1 \quad (p)$ wenn $(\mathfrak{a}, p) = 1$.

Satz 10 Sei G eine trans. PGr. mit zwei regulären abelschen Untergruppen A, B. Sei K eine $(0,1)$-Vertauschungsmatrix $(gK = Kg, \forall g)$, Zeilensumme k. $|A_1| = |B_1| = k$ also $K = \underset{k}{\sum'} a_i = \sum'' b_j = A_1 B_1^- (a_i \in A, b_j \in B)$,
Sp $KK' = nk. = \sum f(Q_i \cdot b_j^-)$, wo $f(g) =$ Fixpunktzahl von g. Daher Mittlere FPZ von $ab^- = \frac{n}{k}$, $a \in A_1, b \in B_1$

54/55

Komplemente maximaler Untergruppen

Cor. 11′ Hat G_0 eine Bahn der Länge k, so ist die mittlere Fixpunktzahl von ab^- für $a \in A_1$, $b \in B_1$ mit passenden $A_i \subseteq A$, $B_1 \subseteq B$, gleich $\frac{n}{k}$, $n = |\Omega|$.

13.7.82: Maier weiß: $(A \leq G, AM = MA \ \ \forall M \lessdot G) \Rightarrow$ Fitt A sn G.

Satz 12 Sei $F \lessdot G$, $A \in$ cpl $(F \leq G)$, $\sigma \in$ Aut G, $A^\sigma = A$
$a^\sigma = a^-$ (also A abelsch). Es gibt $K \subseteq A$ mit $FK = KF^\sigma$ im Gruppenring $Z(G)$ nämlich $K = A \cap FF^\sigma$
Hierfür ist

$$\begin{aligned}
K^\sigma F^{\sigma^2} &= F^\sigma K^\sigma = F^\sigma K^- \qquad \text{invertier el'weise:}\\
KF^\sigma &= F^{\sigma^2} K, \text{ also}\\
FK &= F^{\sigma^2} K = \langle F, F^{\sigma^2} \rangle K \quad \text{in Komplex-Mult.}\\
\text{Daher ist } F &= F^{\sigma^2} \text{ oder } FF^\sigma = G.
\end{aligned}$$

Satz 13 Sei u die Anzahl der ungeraden Primteiler von $p - 1$. Dann ist die Zahl der Invarianten $\{j\}$ $\{\frac{k(p-k)}{p-1}\}$ gleich 2^u (einschließlich $j = 1$).

Bem. 14 Wenn es $j_1 j_2 = z^2 j_3$ gibt, ist nach 53(b) $|\{j\}| \geq 5$, daher $u \geq 3$, vorausgesetzt, daß unter j_1', j_2', j_3' eine von $1, j_1, j_2, j_3$ verschiedene Zahl > 0 vorkommt.

55/56

p

29.9.78 15 Programm zur <u>Berechnung der Invarianten</u> zu p
I) <u>der Größe nach</u>: setze $i_n \equiv n(p-n), 0 \leq i_n < p-1$ rekursiv durch $\frac{p-1}{2}$ Subtr. u. bedingte Addition zu berechnen.
Die k mit $i_k = 0$ geben die Invarianten: $j_k = \frac{k(p-k)}{p-1}$

Berechnung der Inv. zu p:

Ansatz 16 Mit den $k\lambda\cdots$ kann man vielleicht mod $\mathfrak{q}$ rechnen, wo $\mathfrak{q}$ Primidealteiler von $p-2$, oder von $\kappa-\overline{\kappa}$; besser von $\eta-\overline{\eta}$, wo η eine erzeugende „Periode“ für $\mathbb{Q}(\kappa)$ ist.

II Sei $n \in \mathbb{N}$. Zu gegebener Zerlegg $\eta - 1 = ab$, $a, b > 1$:

Ansatz 17 Geg sei: $a = a_1 \ldots a_r$, $b = b_1 \ldots b_\rho$, (nicht notwendig Primzahlpotenzen! z.B. Primzahlen)
Bestimme $x_{\rho\sigma} \mod b_\sigma$: $a_\rho x_{\rho\sigma} \equiv 1 \ \ (b_\sigma) \ \ (\rho = 1 \cdots r, \sigma = 1 \cdots s)$
Bilde $x_\sigma : x_\sigma \equiv \prod_\rho x_{\rho\sigma} \mod b_\sigma$
Setze

$$\begin{aligned}
y_\sigma &:= \frac{1 - a x_\sigma}{b_\sigma} \quad \text{(es genügt: mod } a, \text{ d.h. Zähler mod } ab_\sigma) \\
\eta &:= \prod_\sigma y_\sigma \in \mathbb{Z} \quad \xi := \frac{1 - b\eta}{a} \in \mathbb{Z} \\
y &:= [\eta]_a \quad x := [\xi]_b = \frac{\eta - by}{a}
\end{aligned}$$

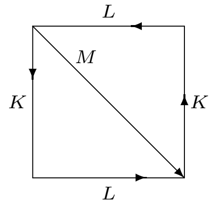
Dann $ax + by = \mathfrak{N}$, $0 < x < b, 0 < y < a$, also falls $n = p$

$$j = xy.$$

bei 8stelligem Rechner reicht das für $a_\rho, b_\sigma < 10^\delta$

56/57

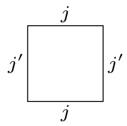
18 Nicht auftreten können Vierecke



Es wäre $(\kappa\lambda)^2 \in \mathbb{Z}$,

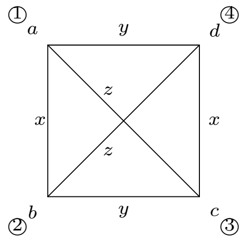
$$\kappa\lambda = \pm n^2 \quad \begin{array}{ll} \diagup & + \quad k\lambda = \pm n, \mu \in \mathbb{Z}, j_3 = 1, M = I \\ \diagdown & - \quad \left(\frac{k\lambda}{n}\right)^2 = -1, \frac{k\lambda}{n} = \pm i \in \mathbb{Q}(\varepsilon) \end{array}$$

19 Aus



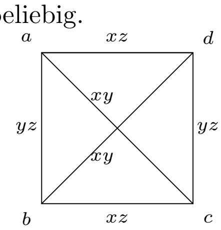
folgt $j'' = j'''$. Dann $jj' = z^2 j'' = y^2 j'''$.

Satz 20 Die allgemeinste „Invarianten"-Bedingung der Kanten eines Tetraeders
1.10.78 mit natürlichen Zahlen derart, daß für jede Fläche das Produkt je zweier Kanten gleich der dritten x eines Quadrats ist, erhält man so:
Belege jede der vier Ecken mit einer nat. Zahl, etwa a, b, c, d; belege jedes Paar von Gegenkanten mit einer Zahl: $x, y, z \in \mathbb{N}$. Dann ist die Invariante zur Kante $(axb) = ayzb$, die Invariante zur Kante $(bzd) = bxyd$.
Anders gesagt: Bilde $P = xyz$. Ist dann a mit d durch y verbunden, so ist die Invar. $= \frac{d}{y} \cdot P$

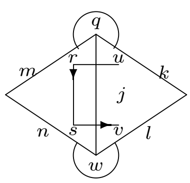


57/58

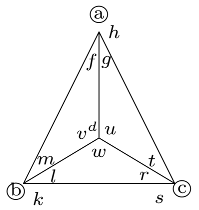
(anders gesagt: Ordne einem Paar von Gegenseiten xy einen anderen xz, dem dritten yz.) $a, b, \cdots, y, z \in \mathbb{N}$ beliebig.



Der Beweis erfolgt, indem man die gegebenen Invarianten jeweils in den beiden angrenzenden Flächen als Podukt der „Winkel" darstellt:



$j = rs$, $u = \sqrt{kj/l}$, $v = \sqrt{jl/k}$, $r = \sqrt{jm/n}$, $s = \sqrt{jn/m}$ und alle 6 Relationen $*$ wie $\frac{u}{r} = \frac{s}{v}$ aufschreibt und im Tetraedernetz wandert, vermöge $*$ und $\frac{s}{v} = \frac{s}{w}\frac{w}{v}$. Die 12 Tetraederwinkel zerfallen in 3 Klassen: Äqn: wenn die den beiden Winkeln gegenüberliegenden Kanten einander gleich oder disjunkt sind (Gegenkantenpaar)
Beim obigen Beweis fängt man mit



[Farbmarkierungen in der Skizze:
rot: f, k, r, u
grün: g, l, s, v
gelb: h, m, t, w]

an u. findet

$$\frac{f}{g} = \frac{k}{l} = \frac{r}{t} = \frac{u}{v}$$

und zyklisch $\underset{\longrightarrow\longrightarrow}{\overset{\longleftarrow}{\text{rot grün gelb}}}$

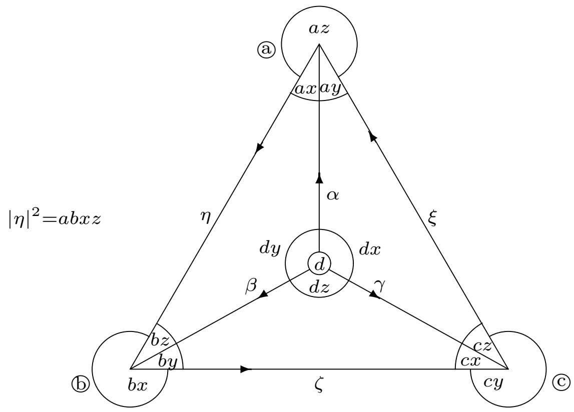
58/59

Die entstehenden Relationen besagen:

$$\text{Rang}\begin{pmatrix} f & g & h \\ k & l & m \\ r & s & t \\ u & v & w \end{pmatrix} = 1;$$

Zerlegung Spalte $\times$ Zeile gibt

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}(xyz).$$



Genauer wird bei passender Vorzeichenwahl der Eigenwerte $\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta$:

$$\begin{array}{rrcl} \circlearrowleft & \xi\eta\zeta & > & 0 \\ \circlearrowleft & \alpha\eta\overline{\beta} & > & 0 \\ & \beta\xi\gamma & > & 0 \\ & \gamma\xi\alpha & > & 0 \end{array}$$

und daher $\xi\eta = az\overline{\xi}$, $\gamma\xi = cz\overline{\alpha}$, $\beta\zeta = by\gamma, \ldots, \xi\eta\zeta = abcxyz$

[Hier sind die Farbmarkierungen:

$$\begin{array}{rl} \text{rot:} & x, \beta, \xi, ax, bx, cx, dx \\ \text{grün:} & y, \gamma, \eta, ay, by, cy, dy \\ \text{gelb:} & z, \alpha, \xi, az, bz, cz, dz \qquad] \end{array}$$

Bem. 21 Sind $\xi, \eta, \zeta \in \mathbb{C}$; $x, y, z > 0$ gegeben mit $\xi\eta = z\overline{\zeta}$, $\eta\zeta = x\overline{\xi}$, $\zeta\xi = y\overline{\eta}$, so wird $\xi\eta\zeta = xyz$ und $|\xi|^2 = yz$ usw.

59/60

p
Bezeichnung wie auf Einlage

Formel 22 Schreibt man Produkte additiv, so lassen sich die Beziehungen entsprechend den Ecken gewichten a, b, c, d, die Lgenskanten gewichten xyz und den Invarianten $A = |\alpha|^2 \quad B = |\beta|^2 \cdots \; Z = |\xi|^2$ darstellen durch

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{A} \\ \\ \mathfrak{X} \end{pmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ \hline X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \overset{(2)}{\doteqdot} \left(\begin{array}{ccc|c||ccc} 1 & & & 1 & & 1 & 1 \\ & 1 & & 1 & 1 & & 1 \\ & & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ \hline & 1 & 1 & & & 1 & 1 \\ 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & & & 1 & 1 & \end{array}\right) \underbrace{\begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}\right\} \\ d \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{(3)} \begin{pmatrix} \mathfrak{a} \\ \mathfrak{x} \end{pmatrix}$$

(1) “Kantenbelegg des Tetraeders“

(2) dh. + ist als · zu lesen

$\square\,\square$ = Verkettungsmatrizen für $\mathfrak{S}_4$, P.- Darst. von Grad $6, 4, 3$

(3) “Eckenbelegg.

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{a} + H\mathfrak{x} + d\mathfrak{e},$$

$$\mathfrak{X} = H\mathfrak{a} + H\mathfrak{x}, \quad H := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathfrak{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

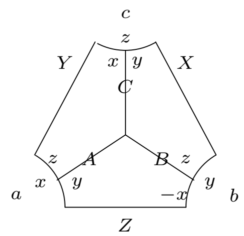
Die Umkehrung lautet

$$\begin{array}{rcl} 2\mathfrak{a} & \doteqdot & -H\mathfrak{A} + H\mathfrak{X} + 2d\mathfrak{e}, d \text{ frei wählbar} \\ 2\mathfrak{x} & \doteqdot & H\mathfrak{A} - \mathfrak{X} - 2d\mathfrak{e} \end{array}$$

$$\begin{aligned} d &\mathrel{\underset{\cdot}{=}} A-a-y-z \\ d &\mathrel{\underset{\cdot}{=}} B-b-x-y \\ d &\mathrel{\underset{\cdot}{=}} Z-a-b-X-Y \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{a} \\ \\ \mathfrak{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

“Eckenbelegg der Tetraederfläche gegenüber d“.



Mit der „Eckensumme“ $e := a+b+c$
Mit der „Winkelsumme“ $w := x+y+z$
Mit der „halben Seitensumme“ $S = \frac{1}{2}(X+Y+Z)$
Mit der „Dreikantsumme“ $D = A+B+C$
gilt für das Dreieck ABC (als Grundfläche eines Tetr. betr.)

60/61

$23'$ $D \mathrel{\underset{\cdot}{=}} e+2w+3d$, $S \mathrel{\underset{\cdot}{=}} e+w$
heißt mult: $D = ABC$ und $D = ew^2d^3$, $S = ew$. EWe $\binom{1\ 2}{1\ 1} = 1 \pm \sqrt{2}$!
$S = |\xi\eta\zeta|$; $D - S \mathrel{\underset{\cdot}{=}} w + 3d$, d.h. $\frac{D}{S} = wd^3$

$23''$ $e \mathrel{\underset{\cdot}{=}} -D+2S+3d$, $w \mathrel{\underset{\cdot}{=}} D-S-3d$, $e = \frac{S^2d^3}{D}$, $w = \frac{D}{Sd^3}$

Im Fall $q \in \mathbb{P}$, $q \nmid d$ wird für die Exponentenverteilung zu q $d=0$, also
$D = e+2w$ und $S = e+w$
Es ist $\xi+\eta+\zeta \mathrel{\underset{\cdot}{=}} S \mathrel{\underset{\cdot}{=}} e+w$

FRAGE ν Frage: $\alpha+\beta=\gamma=$?
Es ist $2(|\alpha|+|\beta|+|\gamma|) \mathrel{\underset{\cdot}{=}} D$
Als Monome in $a, \ldots z$ sind $A \ldots Z$ vom Grad 4, $\operatorname{Gr} S = \operatorname{Gr} D = 12$.

Ansatz Jedes $\mathfrak{q} \in \mathbb{P}$, $\mathfrak{q}_\rho | q$ macht aus einer Inv. Beleg eine neue

24 Ist $\binom{\mathfrak{A}}{\mathfrak{X}} \geq 0$ und $= 0$ auf einem Gegenseitenpaar, etwa $A = X = 0$, so $a = y = z = d = b = c = 0$, $B = C = Y = Z = x$.
Es gibt zwei Typen von minimalen $\binom{\mathfrak{A}}{\mathfrak{X}}$, (0 1 1 0 1 1) und (1 1 1 0 0 0)
Man kann eine Belegung in Primfaktoren zerlegen, diese einzeln drehen und neu zusammensetzen.

61/62

p

Kann man bei $G \in \mathfrak{G}_p$ aus 4 Invarianten eines Tetraeders das p bestimmen?

Formel 25 Die sämtlichen Umlaufs-Beziehungen zwischen $\alpha \cdots \zeta$ lassen sich unter Benutzung von $\zeta\overline{\zeta} = X$ usw. additiv so schreiben: Mit

$$\Xi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, \mathcal{A}_{(\text{lpha})} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt

$$\Xi + (R - R^2)\mathcal{A} \doteqdot R\mathfrak{a} + R^2\mathfrak{x}, \quad \mathcal{A} + \overline{\mathcal{A}} = \mathfrak{A}, \ \ \Xi + \overline{\Xi} = \mathfrak{X}$$

Durch Addition ergibt sich eine <u>neue</u> Beziehung für die speziellen, d.h. durch $\xi\overline{\xi} = X$ usw darstellbaren Invarianten und zwischen ihren Quellen:

$$\Xi - \overline{\Xi} = (R^2 - R)(\mathcal{A} - \overline{\mathcal{A}})$$

26

$$\mathfrak{X} + (R - R^2)\mathfrak{A} = 2R\mathfrak{a} + 2R^2\mathfrak{x}$$

Dazu tritt 22: $\mathfrak{A} = \mathfrak{a} + (R + R^2)\mathfrak{x} + d\mathfrak{e}$, $\mathfrak{X} = (R + R^2)(\mathfrak{a} + \mathfrak{x})$
Das gibt durch Einsetzen in 26 leider nun $0 = 0$, also folgt 26 aus 22. Neu ist aber aus 25:

26 $\Xi - \overline{\Xi} \doteqdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} (\mathcal{A} - \overline{\mathcal{A}})$ d.h. z.B.

$$\frac{\xi}{\overline{\xi}} = \frac{\overline{\beta}}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\overline{\gamma}},$$

d.h. $\xi\beta\overline{\gamma} = \overline{\xi}\,\overline{\beta}\gamma$, was trivial ist.

62/63

p

27 Formel 22 lautet nach Einführung von

$$\mathfrak{d} := \mathfrak{a} + \mathfrak{x}, \mathfrak{D} = \mathfrak{A} - \mathfrak{X} \quad \text{statt } \mathfrak{x}, \mathfrak{A}:$$

$$\begin{array}{lcl} \mathfrak{A} &=& (H-1)\mathfrak{a} - d\mathfrak{e} \quad, 2\mathfrak{a} = H\mathfrak{D} + 2d\mathfrak{e} \\ \mathfrak{X} &=& HA \quad, 2A = (H-1)\mathfrak{X} \end{array}$$

Nützlich: $H(H-I) = 2I$
Noch einfacher: mit $\widetilde{\mathfrak{A}} = \mathfrak{X} - \mathfrak{A}$, $\widetilde{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a} - d\mathfrak{e}$, $\widetilde{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} + \mathfrak{a} : \widetilde{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X}$:
Neufassung von 22:

28

$$\begin{array}{lcl} \widetilde{\mathfrak{A}} &=& (H-1)\widetilde{\mathfrak{a}} \quad, 2\widetilde{\mathfrak{a}} = H\widetilde{\mathfrak{A}} \\ \widetilde{\mathfrak{X}} &=& H\widetilde{\mathfrak{x}} \quad, 2\widetilde{\mathfrak{x}} = (H-1)\widetilde{\mathfrak{X}} \end{array}$$

Durch Multipl. mit den EV $\mathfrak{e}' = (1\ 1\ 1)$ und $\mathfrak{f}' = (1\ \ -1\ 0)$ von H folgt:

29 $(X+Y+Z) - (A+B+C) = (a+b+c) - 3d$,
$X+Y+Z = 2[(x+y+z) + (a+b+c)]$

$$\left.\begin{array}{c} (X-Y-A+B) = -2(a-b) \\ X-Y = -(x+a-y-b) \end{array}\right\} \text{ und zyklisch}$$

G

63/64

30 Zu jeder Belegung (abc, d, xyz) gehört die „duale“ $(\cdots) \stackrel{*}{=} (xyz; d; abc)$
Sie hat die gleichen Invarianten auf den Dreieckseiten, also $\widetilde{X} = X$ usw.,
aber die Inneninvarianten sind anders; z.B. $\widetilde{A} = bcdx$.
Durch diesen Übergang kann man z.B. $a \leq x$ erwzingen.

31 Alle Paare p, j mit $j \in \{\frac{k(p-k)}{p-1} | k \in \mathbb{N}\}$ erhält man so: Wähle $j \in \mathbb{N}$, zerlege

$$j(j-1) = dt$$

und setze

$$p := 2j + d + t = j^2 + j + 1 - (d-1)(t-1)$$

Cor. 31′ Es ist $4j - 1 \leq p \leq j^2 + j + 1$.
Bew:

$$j = \frac{p^2 - (d-t)^2}{4(p-1)} = \frac{(j+d)(j+t)}{p-1}; s = t - d, k = j + d$$

daher $j > \sqrt{p} - 1$

Frage Wird mit dieser Parameterdarstellung die j'-Formel 53.6 durchsichtig?

32 j ist stets Invariante zu den extremen $p = 4j-1$, j^2+j+1. Falls $p \in \mathbb{P}$, ist

$$\begin{cases} (j^2+j+1, & (d-1)(t-1)=1, \text{ falls } (d-1)(t-1)>0 \\ (j,d,t)=1, & (d,t)^2 | j-1 \end{cases}$$

Falls $p \equiv 1 \quad (2)$, ist $(d,t) \equiv 1 \mod 2$

64/65

p

5.10.78
Für jedes $z \in \mathbb{Z}$ ist

33

$$\begin{aligned} pz &= j^2+(2z-1)j+z^2-(d-z)(t-z) \\ \text{insb.} \; -p &= j^2-3j+1-(d+1)(t+1) \end{aligned}$$

daher ist bei $p \in \mathbb{P}$ stets

$$\Big((d+1)(t+1), j^2-3j+1\Big) = 1$$

Ebenso ist wegen $-2p = (j-4)(j-1)-(d+2)(t+2)$,

$$\text{bei } p \in \mathbb{P} \text{ stets } \Big((j-4)(j-1), (d+2)(t+3)\Big) \leqq 2,$$

was im Fall $j \equiv 1 \mod 3$ zu $d \equiv 2 \mod 3$ führt.

15.10 34 Es kommt vor, dass $j_1 | j_3$ ist:
$p = 911$, $p-1 = 35 \cdot 26 \Rightarrow j_1 = 93$, $p-1 = 130 \cdot 7 \Rightarrow j_2 = 2 \cdot 93$

$$\left[p = 7 \quad \frac{7^2-1^2}{4 \cdot 6} = 2 \cdot \frac{(7^5-5^2)}{4 \cdot 6} \text{ Halt: Hier ist } j_1 = 1! \right]$$

Zu prüfen ist nun, ob es vorkommen kann, daß ein j_3 durch zwei verschiedene $j_1 \neq j_2$ teilbar ist.
Zu gegebenem d wird man die allgemeinste Lösung von $p^2-x^2 = d(p^2-y^2)$ quadratisch in ganzz. Parametern darstellen können, z.B. für $d=2$: Wähle $r, s : 0 < r < s < \sqrt{p}$, $r < s(2-\sqrt{2})$, $p = 2s^2-r^2$. Dann

$$\begin{cases} x := & r^2+2s^2-2rs \\ y := & r^2+2s^2+s \end{cases}$$

Lsg von $p^2-x^2 = 2(p^2-y^2)$, $0 < x < y < p$; $x, y \equiv 1(p)$
Anl.: Zu $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ $p = gg' : \exists \rho \in g : \rho = r + s\sqrt{d}$, $|r|, |s| \leq \sqrt{q}$

p

17.10.78

Hilfsatz 35 Die Tripel $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ mit

$$x^2 + z^2 = 2y^2, \quad x < y < z, \quad (x, y, z) = 1$$

(besteht nur aus ungeraden Zahlen und) entsprechend eineindeutig den $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ mit

$$0 < a < b(2 - \sqrt{2}),\ a \equiv 1 \mod 2$$

vermöge

$$\begin{cases} x = & 2(b-a)^2 - a^2 = (2b-a)^2 - 2b^2 \\ y = & (b-a)^2 + b^2 \\ z = & 2.b^2 - a^2 \end{cases}$$

$$(z, x - y\sqrt{2}) = (a - b\sqrt{2}) \quad (a, b) \neq (0, 0) \quad 0 \leq a \leq n, |b| \leq n$$

Bew: $\zeta := x - y\sqrt{2}$, $\zeta\zeta' = -z^2$, $j := (z, \zeta)$, $(\zeta, \zeta') = 1$, $(z) = \mathfrak{z}\mathfrak{z}'$, $(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}') = 1$

66/67

36 Nie ist $j_1 j_2 = j_3$, wenn $j_\nu = \frac{p^2 - s_\nu^2}{4(p-1)}, j_1 \leq j_2 < j_3$
12.11.78 (vgl. XI 198(16)) Einfacher und allgemeiner (38)
Bew: Sonst $0 < s_\nu < p$, $s_\nu \equiv 1(2)$
Kürzer 36′

$$s_1^2 s_2^2 \equiv 4 s_3^2 \ (p)$$

$$s_1 s_2 = 2\sigma s_3 + \mu p, \quad \sigma = \pm 1, \quad 2 \nmid \mu$$

$$\circledast \quad (p^2 - s_1^2)(p^2 - s_2^2) = 4(p-1)(p^2 - s_3^2) \text{ gibt } \mod p^2 \text{ gelesen:}$$

$$s_3 + \sigma\mu \equiv 0 \ \ (p), \text{ also auch } \mod 2p$$

$$\text{Aber } \mu = \frac{s_1 s_2 - 2\sigma s_3}{p} \text{ gibt } 0 < \mu < p, \text{ daher}$$

$$|s_3 + \sigma\mu| < 2p, \quad s_3 + \sigma\mu = 0, \quad \sigma = -1, \mu = s_3$$

$$s_1 s_2 = (p-2) s_3. \text{ Dies in } \circledast \text{ ergibt}$$

$$\begin{aligned} (p-2)^2 + s_3^2 &= s_1^2 + s_2^2 \\ (s_1 - s_2)^2 &= (p-2)^2 + s_3^2 - 2(p-2)s_3 = (p - 2 - s_3)^2 \\ s_1 - s_2 &= p - 2 - s_3 \ . - 1 \\ \text{Ebenso } s_1 + s_2 &= p - 2 + s_3 \ \ .1 \\ s_2 &= s_3 \ \text{ Wid.} \end{aligned}$$

36′ Kürzerer Beweis: Nach $64 \cdot 31'$ wäre

$$p - 1 \leq j_1(j_1+1) \leq j_1 j_2 = j_3 \leq \frac{p+1}{4}$$

37 Nie ist $j_1 j_2 = 4 j_3$
Bew: $j := j_1 < j_2$
Falls $p < j^2 + j + 1$, so

$$\begin{cases} p \leq 2j + 2 + \frac{j(j-1)}{2} = \frac{j^2+3j+4}{2} & 64 \cdot 31 \\ j \leq 3 \end{cases}$$

Falls $p = j^2 + j + 1$, so $j_2 = j + 1$, $p = 2(j+1) + d + b$, $2 \leq d | j(j+1)$, $j^2 \leq 3j + 5$, $j \leq 4$. In jedem Fall

$$p \leq 13, p - 1 = 2q + \beta \text{ Wid.}$$

G

67/68

p

17.11.78

38 Aus $j_1 j_2 = j_3 j_4$ ($j_\nu \geq 1$) folgt bei pass. Numerierung: $j_1 = j_3$, $j_2 = j_4$.
NB: $j = 1$ kommt von $s = p - 2$.
Bew: Sei $(p^2 - s_1^2)(p^2 - s_2^2) = (p^2 - s_3^2)(p^2 - s_1^2)$, oBdA $p > 2$, und etwa $p > s_1 \geq s_2 > 0$, $p > s_3 \geq s_y > 0$. s_i ungerade

$$p^2 | s_1^2 s_2^2 - s_3^2 s_4^2 = (s_1 s_2 + s_3 s_4)(s_1 s_2 - s_3 s_4)$$

Fall I: $p | s_2 s_2 - s_3 s_4$. Wegen $p > 2$ ist $p \nmid s_{12} + s_3 s_4$
$p^2 | s_1 s_2 - s_3 s_4 =: S \quad -p^2 < S < p^2 \quad S = 0$
$s_1 s_2 = s_3 s_4 \quad p^2 - s_1^2 - s_2^2 = p^2 - s_3^2 - s_4^2$
$(s_1 \pm s_2)^2 = (s_3 \pm s_4)^2$
$s_1 \pm s_2 = s_3 \pm s_2$; $s_1 = s_3$.

Fall II: $p | s_1 s_2 + s_3 s_4$. Dann $p^2 | s_1 s_2 + s_3 s_4 < 2p^2$
$s_1 s_2 + s_3 s_4 = p^2 \qquad \bmod 2 : 1 + 1 \equiv p^2$ Wid.

68/69

p

19.11.78 39 Aus

$$\bigstar \begin{cases} j_1 j_2 = z^2 j_3 \\ z | (j_1, j_2) \end{cases}$$

stets $(\nu, z) = 1$ folgt mit $j := \frac{b^2 - s_0^2}{4(p-1)}$ $s_0 := p - 2$:

$\circledast$ $zs_0s_3 = \delta s_1 s_2 + \nu p^2$, daher $2 \equiv 1 + \nu \mod 2, \delta = \pm 1, z | \nu^2 - 1$

Damit ist $\underline{\nu^2 \equiv 1 \mod z}$, denn $s_i^2 \equiv p^2(z.4(p-1))$, also

$p^4 \underset{z}{\equiv} s_1^2 s_2^2 \underset{z}{\equiv} \nu^2 p^4$; und es ist, wenn $z > 0$,

$z > 1$, also $\nu \neq 0$, also $\operatorname{sgn} \nu p^2 = \operatorname{sgn} z s_0 s_3 = +1$

$\underline{1 \leq \nu \leq z - 1}$, daher $\nu = 1$ oder $\nu^2 \geq z + 1, \nu > \sqrt{2}$

$z | \delta s_n + \nu s_2, (s_2 - s_1)(\nu - \delta)$

$39'$ Falls $\underline{z = q^\beta > 1}$, $2 < q \in \mathbb{P}$, so ist $\nu \neq 1$, da z ungerade, also ist $\nu = z - 1$, denn $q^\beta | (\nu + 1)(\nu - 1)$.
Es folgt weiter aus

$$s_2 - \delta s_1 = 2tz$$

und durch Rückgriff auf ★

$$s_0 - s_3 = 2t, \quad p^2 - s_0 s_3 = (x + y)(2p - 2) + 2t_2^2 \text{ mit } j_1 = yz, j_2 = xz$$

FORTS.: 76.51^*, 79.56 $\quad p - 1 \big| t(t+1), t(z-1) \quad j_3 = \frac{(t+1)(p-t-1)}{p-1}$

$39''$ $z = 2\beta > 1 \Rightarrow \nu = z - 1$ oder $\nu = 1$ Bew. unten

$39'''$ Sei $\nu = 1$. Aus $\circledast$ folgt jetzt $z = 2\zeta$, $p - 1 \big| 4\zeta^2(\zeta^2 - 1)$.

Bew. $39''$ zu $39''$: Bei $q = 2$ ist $2^\beta \big| \delta s_1 s_2 + \nu p^2$, $2 \big| \delta s_1 s_2 - p^2$, $2^{\beta+1} \big| s_1^2 s_2^2 - \nu^2 p^2$ und $2z \big| p^2 - s_1^2$, $p^2 - s_2^2$, also $\nu^2 \equiv 1 \bmod 2^{\beta+1}$, $2^\beta \big| \nu \pm 1$

69/70

p

19.11.78 40 Nie ist $j_1 j_2 = 9 j_3$, $3 \big| (j_1, j_2)$
Wahr für $p < 20$, weiter sei $p > 20$. Sonst
(39) $3 s_3 s_0 = \delta s_1 s_2 + 2p^2 \quad (s_0 = p - 2)$ $\underline{s_1 s_2 \equiv -8\delta \mod p - 2}$.
mod $4(p-1)$ ist $9p^2 \cdot p^2 \equiv p^2 \cdot p^2 + 4\delta s_1 s_2 + 4p^4$
mod $p - 1$ ist $s_2 s_2 \equiv \delta$
$s_1 s_2 \equiv \delta \mod p - 1$. Also

$$\begin{aligned} s_1 s_2 &= \delta + m(p-1) \qquad m > 0 \\ &= -8\delta + n(p-2) \end{aligned}$$

$$\boxed{n(p-2) = m(p-1) + 9\delta}$$

Fall I: $n \leq m - 1$, $n(p-2) \geq (n+1)(p-1) + 9\delta$, $\quad p - 1 \leq {}_{-}\delta$ Wid.

Fall II: $n \geq m+1 \Rightarrow m(p-1)+9\delta \geq (m+1)(p-2)$
$m \geq p-2-9\delta, \delta = 1; m \geq p-11$

$$\begin{aligned} s_1 s_2 &\geq 1+(p-11)(p-1) \\ &= (p-4)(p-7)-16 \end{aligned}$$

Da $s_1 < s_2 \leq p-4$, ist $s_1 \geq p-7-\frac{16}{p-7} > p-8$
bleibt nur möglich $s_1 = p-6$, $s_2 = p-4$
Das widerspricht $s_1 s_2 \equiv 1 \mod (p-1)$, denn mod $p-1$ ist
$(p-4)(p-6) \equiv -3. -5 = 15 \not\equiv 1 \ \ (p-1)$

70/71

p

Fall III: $m = n$

$$\square \text{ gibt } m = -9\delta, \delta = -1, m = n = 9.$$

$$\underline{s_1 s_2 = -1 + 9(p-1) = 9p - 10}$$

$$3s_3(p-2) = s_1 s_2 + 2p^2 \text{ gibt nun}$$

$$\underline{3s_3 = 2p-5}$$

$$9s_3^2 = 4p^2 - 20p + 25$$

$$\text{mod } 36(p-1) \text{ ist } 0 \equiv 9(p^2 - s_3^2) = 5p^2 + 20p - 25$$

$$0 \equiv 5(p^2 + 4p - 5) = 5(p+5)(p-1)$$

$$\text{mod } 36: \quad 0 \equiv 5(p+5) \quad \underline{p \equiv -5 \mod 36}$$

$$p \equiv -1 \mod 4$$

$$p = -1 + 4r$$

$$\text{Aus } (p^2 - s_1^2)(p^2 - s_2^2) = 9(p^2 - s_3)^2(p^2 - s_0^2) \text{ folgt}$$

$$s_1^2 + s_2^2 = p^2 - 20p + 21 \text{ mit } s_1 s_2 = 9p - 10$$

$$\text{also } (s_1 + s_2)^2 = p^2 - 2p + 1$$

$$s_1 + s_2 = p - 1 \text{ mit } s_1 s_2 = \cdots$$

$$\text{wird } s^2 - (p-1) + 9p - 10 = 0,$$

$$s_{1,2} = \frac{p-1}{2} + \sqrt{(\frac{p-19}{2})^2 - 80} = \frac{p-1}{2} + 2\sqrt{(r-5)^2 - 20}$$

$$x^2 - 20 = y^2 \text{ hat nur Lsg } \frac{x+y}{2} = 5, \frac{x-y}{2} = 1,$$

$$\text{gibt } s_{1,2} = 13, 29; p = 43 \not\equiv -5 \ \ (36) \text{ Wid.}$$

71/72

Untersuchung von $\nu = 1$:
Vor: $\nu = 1$ also $2|z$.

41 Ist $\begin{cases} zs_0s_3 = \delta s_1 s_2 + p^2 \\ j_1 j_2 = z^2 j_3 \end{cases}$ sonst $4 \nmid z$. Genauer: Ist $2|z|{j_1 \atop j_2}$, so ist
$z = 2\zeta$ mit ζ ungerade, $\zeta s_0 s_3 \equiv 1 \mod 4$,
also $5(p-2)s_3 \equiv 1 \pmod 4$, $\delta s_1 s_2 \equiv 1 \pmod 8$
Bew: $8z|j_1(4p-4) = p^2 - s_1^2$

$$\begin{aligned} 8z|p^2(p^2-s_1^2) + s_1^2(p^2-s_2^2) &= p^4 - s_1^2 s_2^2 \\ &= (p^2 - \delta s_1 s_2)(p^2 + \delta s_1 s_2) \\ &= (p^2 - \delta s_1 s_2) z s_0 s_3 \\ 8\big|p^2 - \delta s_1 s_2 \quad 1 &\equiv \delta s_1 s_2; z s_0 s_3 \underset{8}{\equiv} 2 \end{aligned}$$

Ebenso, genauer:

41′ Sei $j_1 j_2 = z^2 j_3$, $2|z|j_{1,2}$, $zs_0s_3 = \delta s_1 s_2 \overset{\text{Vor.: } \nu=1\ !}{\updownarrow} + p^2$; dann ist $z = 2\zeta$,

$$\begin{cases} \zeta s_0 s_3 \equiv p^2 \mod 2^{\alpha+1} \\ s_1 s_2 \equiv \delta p^2 \mod 2^{\alpha+2} \end{cases}, \text{ wenn } 2^\alpha \big| p-1.$$

42 $\nu = 1$, $j_1 j_2 = z^2 j_3 \Rightarrow z \neq 2^n$, 72(41) 67(37)

43 Identität: $(p^2 - s_1^2)(p^2 - s_2^2) - p^2(2p^2 - s_1^2 - s_2^2) = -p^4 + s_1^2 s_2^2$
d.h: $j_1 j_2 (p^2 - s_0^2)^2 - p^2 (j_1 + j_2)(p^2 - s_0^2) = -p^4 + s_1^2 s_2^2$
also, <u>falls $\nu = 1$:</u> $= -zs_0s_3(p^2 - \delta s_1 s_2)$
Allgemeiner: 45 $\otimes$

72/73

p

44 $z^2(p-s_0)^2 j_3 + zs_0(p^2 - \delta s_1 s_2) = p^2(j_1+j_2)(p^2 - s_0^2)$
wenn $j_1 j_2 = z j_3$, $\nu = 1$ in $zs_0s_3 = \delta s_1 s_2 + \nu p^2$
Ende der Untersuchung von $\nu = 1$

45 Aus $j_1 j_2 = z^2 j_3$, $zs_0s_3 = \delta s_1 s_2 + \nu p^2$ (39) folgt

$$\begin{aligned} \nu^2 &\equiv (j_1 - 1)(j_2 - 1) \mod (p-2)z \\ &\equiv (k_1-1)^2(k_2-1)^2 \mod (p-2) \end{aligned}$$

Bew: $zs_0s_3 = \delta s_1 s_2 + \nu p^2 : \nu p^2 - \delta s_1 s_2 = 2\nu p^2 - z s_0 s_3$

$\otimes$ $zs_0s_3 \cdot \overbrace{(-zs_0s_3 + 2\nu p^2)}^{-\delta s_1 s_2 + \nu p^2} = \nu^2 p^4 - s_1^2 s_2^2$
$\underset{43}{=} (\nu^2 - 1)p^4 + p^2(j_1 + j_2)(p^2 - s_0^2) - j_1 j_2 (p^2 - s_0^2)^2$

mod $s_0 z$ also: $0 \equiv p^4(\nu^2 - 1 + j_1 + j_2 - j_1 j_2)$.

Kor. 45′ 45 verschärft 39: $z|\nu^2-1$ schon wenn $z|j_1+j_2$.

46 Ist $q\in\mathbb{P}$, $q^\alpha\top z$, $\begin{cases} q>2 \text{ oder} \\ \alpha\geq 2, \end{cases}$ so ist $q^\alpha\top\nu-\varepsilon$, wenn $q|\nu-\varepsilon, q>2$ bzw. $4|\nu-5$ Bew 45 ⊗

45″ Genauere Fassung von 45:
mod $s_0^2 z$ ist $2\nu z s_0 s_3\equiv p^2\big(\nu^2-(j_1-1)(j_2-1)\big)$
Bew ⊗ Also:

$$\begin{aligned} &\text{mod } s_0(:=p-2):2\nu s_3\equiv p^2\cdot\frac{\nu^2-(s_1-1)(j_2-1)}{zs_0}\\ &\text{daher}\quad \text{mod } p-2:\nu s_3\equiv 2\frac{\nu^2-(j_1-1)(j_2-1)}{zs_0}\\ &\text{daher}\quad \text{mod } s_0^2 z:\nu z s_0 s_3\equiv 2[\nu^2-(j_1-1)(j_2-1)] \end{aligned}$$

73/74

46 $j_1 j_2=z^2 j_3$, $z|j_1+j_2\Rightarrow$

$$(z_3s_3-\nu_3s_0)^2\equiv s_0^2 \mod z\cdot(4p-4)$$

also

$$z(4p-4)\big|(zs_3-(\nu+1)s_0)(zs_3-(\nu-1)s_0)$$

Bew 45 ⊗

47 Die Gleichung XIII.74.6 lautet jetzt:

$$j_1+j_2+\nu^2-z^2=j_3'=\frac{p^2-(zs_3-\nu s_0)^2}{p^2-s_o^2}$$

Es ist $j_3'\equiv 1+j_1j_2 \mod zs_0$. Stets ist $|s_3'|\leqq\frac{s_1s_2+\nu(4p-4)}{p-2}<2p$ also schlimmstenfalls ist $|s_3''|=|s_3'-(2p-2)|<p$
Es ist

$$s_3'=\delta(zs_3-\nu s_0)=\frac{s_1s_2+\delta\nu(4p-4)}{p-2}$$

$\delta=-1\Rightarrow|s_3'|<p$
$\delta=+1\Rightarrow\nu<\frac{zs_0s_3}{p^2}<\frac{z(p-2)(p-4)}{p^2}$

74/75

48 In den Gleichungen zu einem Dreieck $s_0 z_\rho s_\rho = \delta_\rho s_{\rho-1} s_{\rho+1} + \nu_\rho p^2$ ($\rho =$ 1 2 3 zykl.) haben alle δ_ρ den gleichen Wert δ.
Bew:

$$\left.\begin{array}{rcl} s_0 z_1 s_1 &=& \delta_1 s_2 s_3 + \nu_1 p^2 \\ s_0 z_2 s_2 &=& \delta_2 s_1 s_3 + \nu_2 p^2 \end{array}\right| \begin{array}{l} \cdot s_1 \\ \cdot - s_2 \end{array}$$

$$s_0(z_1 s_1^2 - z_2 s_2^2) = (\delta_1 - \delta_2) s_1 s_2 s_3 + p^2(\nu_1 s_1 - \nu_2 s_2)$$

aber

$$\underline{z_1 s_1^2 - z_2 s_2^2 = (z_1 - z_2) p^2}$$

denn

$$z_1(p^2 - s_1^2) = (4p-4) \cdot z_1 j_1 = (4p-4) \underbrace{z_2 j_2}_{z_1 z_2 z_3} = z_2(p^2 - s_2^2)$$

Also

$$z_1 s_1^2 - z_2 s_2^2 \equiv 0 \quad (p^2), \qquad (\delta_1 - \delta_2) s_1 s_2 s_3 \equiv 0 \quad (p^2).$$

Kurz: mod p^2 ist $(\delta_1 - \delta_2) s_1 s_2 s_3 \equiv s_0(z_1 s_1^2 - z_2 s_2^2) \equiv 0$
obige Rechnung ergibt mit $\delta_1 = \delta_2$ nun:

49 $\underline{\nu_1 s_1 - \nu_2 s_2 = (p-2) \cdot (z_1 - z_2)}$
$\underline{z_1 s_1^2 - z_2 s_2^2 = p^2 \cdot (z_1 - z_2)}$
$p^2(\nu_1 s_1 - \nu_2 s_2) = (p-2)(z_1 s_1^2 - z_2 s_2^2)$

50 mod q ist $p \equiv \pm s_1$, wenn $2 \nmid q^\alpha \mid j_1$

75/76

Satz 51 In jedem Dreieck ist mit $s_0 := p - 2$
22.11.78

(a) $m := s_0 z_\rho - s_\rho \nu_\rho$ unabhängig von $\rho \in \{1,2,3\}$
(b) und mit passendem $n \in \mathbb{N}$: $\nu_\rho^2 - 1 = z_\rho(z_\rho - n)$ unabhängig von $\rho \in \{1,2,3\}$

Bew: Nach 45 ist

$$s_0 s_3(\nu_3 p^2 - \delta s_1 s_2) = \frac{\nu_3^2 - 1}{z_3} p^4 + \\ p^2(p^2 - s_0^2)(z_1 + z_2) - (p^2 - s_0^2) z_1 z_2 z_3$$

Sammle links die symmetrischen Glieder (nach Addition von $\pm p^2(p^2 - s_0^2) z_3$ rechts):

$$\otimes \qquad -s_0 \delta s_1 s_2 s_3 - p^2(p^2 - s_0^2)(z_1 + z_2 + z_3) + (p^2 - s_0^2)^2 z_1 z_2 z_3 \\ = -p^2 s_0 \cdot s_3 \nu_3 + \frac{\nu_3^2 - 1}{z_3} p^4 - p^2(p^2 - s_0^2) z_3$$

Ersetze rechts 3 durch ρ bzw. z, setze gleich, div. : p^2:

$$\lozenge \qquad -s_0 s_3 \nu_3 + \frac{v_3^2 - 1}{z_3} p^2 - p^2 z_3 + s_0^2 z_3 = \ldots\ (\rho) \ldots$$

mod p^2 ist also

$$\begin{aligned} -s_0 s_3 \nu_3 + s_0^2 z_3 &\equiv -s_0 s_\rho \nu_\rho + s_0^2 z_\rho \\ -s_3 \nu_3 + s_0 z_3 &\equiv -s_\rho \nu_\rho + s_0 z_\rho \end{aligned}$$

beides $|\ \ | < p^2$? $\quad = \text{(a) Kürzer} \nearrow$
Aus $\lozenge$ folgt nun

$$\frac{\nu_3^2 - 1}{z_3} - z_3 = \frac{\nu_\rho^2 - 1}{z_\rho} - z_\rho =: -n$$

Es ist

$$n = \frac{1 + z^2 - \nu^2}{z} > 0, \text{ also } n \in \mathbb{N}.$$

51* $0 < n < z$; $\forall_\rho : [n = 2 \iff \nu_\rho = z_\rho - 1]$

76/77

p

51′ Ansatz zu einem vielleicht kürzeren Beweis von 51(b):

$$\begin{aligned} j_1(p^2 - s_2^2) &= j_2(p^2 - s_1^2) \\ z_2(p^2 - s_2^2) &= z_1(p^2 - s_1^2) \end{aligned}$$

51″ $\underline{z_1 s_1^2 - z_2 s_2^2 = p^2(z_1 - z_2)}$ $\quad z_1 s_1^2 \underset{p^2}{\equiv} z_2 s_2^2$ Aber

$$s_0 z_1 s_1^2 \quad = \quad \delta s_1 s_2 s_3 + \nu_1 s_1 p^2$$

$$\underline{s_0 z_2 s_2^2 = \delta s_1 r_2 s_3 + \nu_2 s_2 p^2}$$

also

$$\begin{aligned} s_0 p^2 (z_1 - z_2) = s_0(z_1 s_1^2 - z_2 s_2^2) &= p^2(\nu_1 s_1 - \nu_2 s_2) \\ s_0(z_1 - z_2) &= \nu_1 s_1 - \nu_2 s_2 \\ s_0 z_1 - \nu_1 s_1 &= s_0 z_2 - \nu_2 s_2 \quad \cdot \quad \text{Das ist 51(a).} \end{aligned}$$

52 mod p^2 gilt $s_0(z_1 z_2 z_3 - z_1 - z_2 - z_3) + 2m \equiv 0$,
mod s_0 gilt
$[z_1 z_2 z_3 - z_1 - z_2 - z_3] + n \equiv 0$
Def. [von m und n]: (51)

Genauer steht's in 53

Bew 51 $\otimes$ Zusammen mit den aus

$$s_0 z_1 s_1 = \delta s_2 s_3 + \nu_1 p^2$$

usw. folgenden

$$\frac{s_0^3 z_1 z_2 z_3 - \delta s_1 s_2 s_3}{p^2} = p^2 \cdot \frac{p^2 \nu_1 \nu_2 \nu_3 + \delta(\nu_1 \nu_2 s_1 s_2 + \cdots)}{s_1 s_2 s_3} + (\nu_1 s_1 + \cdots)$$

gibt

$$\begin{aligned} & p^2 s_0 \frac{p^2 \nu_1 \nu_2 \nu_3 + \delta(\nu_1 \nu_2 s_1 s_2 + \cdots)}{s_1 s_2 s_3} + s_0(\nu_1 s_1 + \cdots \\ &= s_0 m - p^2 n + (p^2 - s_0^2)(z_1 + \cdots) + (2s_0^2 - p^2) z_1 z_2 z_3 \end{aligned}$$

mit 51 a gibt das

77/78

53

$$\begin{aligned} & \underbrace{(2s_0^2 - p^2)}_{p^2 - 8p + 8}[z_1 z_2 z_3 - (z_1 + z_2 + z_3)] + 4 s_0 m - p^2 n \\ & \qquad = p^2 s_0 \underbrace{\frac{p^2 \nu_1 \nu_2 \nu_3 + \delta(\nu_1 \nu_2 s_1 s_2 + \cdot + \cdot)}{s_1 s_2 s_3}}_{a \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

$|a| \leq \frac{z_1 z_2 z_3}{s_0} \lesssim \frac{1}{8}\sqrt{p}$, $p^2 \nu_1 \nu_2 \nu_3 < \frac{1}{8}\sqrt{p}\, s_1 s_2 s_3$, $s_1 s_2 s_3 > 8p^{3/2} \nu_1 \nu_2 \nu_3$, $\prod \frac{s_i}{\nu_i} > 8p^{3/2}$
Mit 47 verbinden!

Frage: Bedeutung der „Determinanten“ wie $s_0 z_\rho - s_\rho \nu_\rho = s$, $z_1 z_2 z_3 - (z_1 + z_2 + z_3)^2$?
mod $p^2 - c^2$ rechnen ($c \in \mathbb{N}$)
Modul p^4 Vorschlag Knapp: p-adik

54 Den gleichen quadratischen Restcharakter mod p^2 haben alle drei s_ρ^2: und sogar alle s_ρ^2, wenn $p \equiv 1 \mod 4$.
Bew: $z_1 s_1^2 \equiv z_2 s_2^2 \ (p^2)$ und $z_1^u \equiv 1$ wenn $p - 1 = u \cdot 2^\alpha$

78/78a

[Eingeklebtes Blatt mit Seiten 78a, 79a]
25.8. von Stenorette abgeschieben:

[Die folgenden Ausführungen über den Subnormalisator sind mit Bleistift durchgestrichen.]
Subnormalisator $\mathrm{Sn}_G(A)$:
Man kann verlangen $\mathrm{Sn}_G(A) \cap \mathrm{Sn}_G(B) \leq \mathrm{Sn}_G(A \cap B)$ und vielleicht $U, V \leq \mathrm{Sn}_G(A)$, $UV = VU \Rightarrow UV \leq \mathrm{Sn}_G(A)$.
Maximale Ugr, sn Kerne: $A \leq M_i \lessdot G$, A sn $G \Rightarrow A^G \leq M_i$, wenn also A sn $M_i \lessdot G$ $(i = 12)$, $M_1 M_2 = G$, so $A^G \leq M$.
$M_i \lessdot G$ $D = \cap M_i \Rightarrow D_{\cdot\cdot G} = D_G$.
$\forall$ M_i zweitmaximal in $G \Rightarrow$ $D_{\cdot\cdot G}$ hat Defekt ≤ 2 in G.

$$B \lessdot A \leq G \Rightarrow B_{\cdot\cdot G} \trianglelefteq A.$$

$S \in$ **???**G;

$$S \text{ sn } \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \lessdot G \Rightarrow \begin{cases} S_A \text{ oder } S_B \quad pq\text{-Gruppe} \\ \text{oder } \mathcal{N}_G(S) \leq A \cap B \end{cases}$$

S maximal und S sn G, $S \leq \underset{B}{\overset{A}{\neq}} \lessdot G$, $AB = BA \Rightarrow S \trianglelefteq G$.
$A \neq B$, ${}^{A}_{B} \lessdot G$; $S \in$ sn $A \cap$ sn $B \Rightarrow S_A$ oder S_B pq-Gruppe.
Liegt A in <u>mehreren</u> max Ugr von G und ist A sn in <u>jeder</u> von solchen, so A sn G; in diesem Sinn ist Zipper Lemma ein Subnormalteilersatz.

OHIO rot: Ist M G-Modul, so $MM^\perp = C^\perp$, genügt F?
G pri $\iff$ Herz einfüssig
$L^2 = C^\perp \Rightarrow G$ 2-tra. G
Vertausch Matrix V macht G-Endom φ von $F_2(\Omega)$, mit Kernφ = orth Komplement von $\varphi' F_2$.

78a/79a

August 81

Forts. Als Körper mit Grad $G = p^\alpha$ sollte man den p-adischen nehmen. Ist die Faltung zweier G-Moduln wieder einer? Für den 2-Abschluß stimmt das Entsprechende. Nein: $C^\perp * C^\perp * \cdots$. Das Produkt zweier Invarianten i_1, i_2 mit $dy\, i_1 + dy\, i_2 = 2p - 2$ hat den Grad $p - 1$.
Da stets $V \in \mathfrak{V} \Rightarrow V^{i-1'} \in \mathfrak{V}$ gilt (sogar ohne reguläre Untergruppe), kann man stets bezüglich des Exp. -1 homogenisieren, dh. „im Reellen“ arbeiten.
Für jeden T-Modul M wird M^2 additiv von den $m^2, m \in M$, erzeugt, falls char $F \neq 2$. Daher ist bei unserem Fall p^ν L^2 minimal über L (und dadurch eind. bestimmt).
$p = p^2$: Wenn es einen rationalen Komplex gibt von weniger als $\frac{p^2}{2}$ Punkten, so bilden diese zusammen mit 0 Gerade, die von G als solche permutiert werden (Calwer Lemma)

Bei $\begin{cases} \text{char } p \\ n = p^\alpha \end{cases}$ hat jedes V <u>nur einen</u> EW, da jeder ERaum ein G-Modul ist und jeder G-Modul $(1\ 1\ 1\ \cdots\ 1)^t$ enthält. Also wenn f G_0-invariant ist und $\int f = 0$, so ist f $*$-nilpotent. (Sowieso!)

79a/79

p

55 $\delta = -\operatorname{sgn} s_\rho s_\sigma \ |\mathrm{mod}|\ p-2$, $\delta 4\nu_3 = s_\rho s_\sigma \ |\mathrm{mod}|\ p-2$
Bew:

$$\begin{aligned} (p-2)z_1 s_1 &= \delta s_2 s_3 + \nu_3 p^2, \\ 0 &< \nu_3 < z_3 \leq \frac{j_3}{2} \leq \frac{p+1}{8} < \frac{p-2}{2} \end{aligned}$$

CAMERON, MZ 128, 1-14 erwähnt meine alten Ergebnisse u neuere Bestät. von P. Neumann

56 Aus

$$s_0 z_3 s_3 = \delta s_1 s_2 + (z_3 - 1)p^2$$

folgt

$$\begin{matrix} \text{a)} \\ \text{b)} \end{matrix} \quad \begin{cases} |s_1 - \delta s_2| = z_3(s_0 - s_3) \\ p^2 - \delta s_1 s_2 = z_3(p^2 - s_0 s_3) \end{cases}$$

c) $\delta = -1$ d) $\frac{s_1+s_2+s_3}{3} \geq \frac{a}{a+2} \cdot s_0, a := \min z_\rho$ e) $(z_1, z_2, z_3)\big|2$
Bew: b ist die Vorauss, a folgt aus

$$\begin{cases} (p^2 - \delta s_1 s_2)^2 = z_3^2(p^2 - s_0 s_3)^2 \\ (p^2 - s_2^2)(p^2 - s_2^2) = z_3^2(p^2 - s_0^2)(p^2 - s_3^2) \end{cases}$$

durch Subtraktion. Bew c): Nach 76.51* ist auch $\nu_\rho = z_\rho - 1$ für $\rho = 1, 2$, daher kann oBdA $s_3 < s_2 < s_1 < s_0$ angenommen werden. Damit ist, falls $\delta = 1$, $s_1 - s_2 \geq 2(s_0 - s_3)$ Wid.
d) Bilde $\sum\limits_\tau$: $s_\rho + s_\sigma = z_\tau(s_0 - s_\tau) \geq a(s_0 - s_\tau)$
e) $d := (z_1, z_2, z_3) \Rightarrow s_\rho + s_\sigma \equiv 0(d)$

$$\begin{gathered} s_\rho - s_\sigma = (s_\rho + s_\tau) - (s_\sigma + s_\tau) \equiv 0(d) \\ d|s_\rho,\ p^2 - s_2^2, p \text{ Wid.} \end{gathered}$$

79/80

Injektoren u. Projektoren; p

sollten sich gemeinsam definieren lassen als die bezüglich einer passenden teilw. Odnung $\prec$ maximalen unter den $\mathfrak{X}$-Ausschnitten von G

(p) Siehe Feit, Santa Cruz, preprint, pp 10ff.

80/81

$M\mathfrak{X}G$ Forts. v. 12

Bsp (1) Aus $A \in \mathcal{M}\mathfrak{E}G$, $B \leq G$, $A \neg G^\lambda \geq B \neg G^\lambda$ folgt nicht $B \underset{G}{\leq} A$, nicht einmal für $l = 2$.
Bsp. $G =$ Sym 5, $\pi = \{2,3\}$, $A = S(123) \times S(45) =$ 3-Sylow Normalisator in G; $|A| = 3 \cdot 2^2$, $B = \langle(\alpha\beta\gamma\delta)\rangle$ mit $(\alpha\gamma)(\beta\delta) \in A$. Es ist also etwa $A =$ Sym $\{123\} \times$ Sym $\{45\}$, $B = \langle(2435)\rangle$.

Bsp (2) Aus $A, B \epsilon \mathcal{M}_\pi G$, $\pi = \{2,3\}$, $\{G_\lambda\}_{\lambda=1}^2$ Hauptreihe von G, $A \neg G^2 = B \neg G^2$, $A \neg G^1 \underset{G^1}{=} B \neg G^1$ folgt nicht (Timmesfelds Verm!) $A \underset{G}{=} B$.
Wähle $\begin{cases} |R| = |S| = 24 \\ R, S \in \mathcal{M}_\pi G_{168}, R \underset{G_{168}}{\neq} S \end{cases}$ $, G_{168} \underset{2}{\lhd} H \leq T$ einfach, $R \underset{H}{=} S$.
Wähle $G_1 = N_1 \times \cdots \times N_{|T|}$, $N_1 \cong N$, wo N mit 2 nicht-isomorphen max. π-Ugr,etwa X, Y.

$$\begin{array}{rcl} G & := & N \wr \text{ reg } T =: G_1] \text{ T} \\ A & := & X_1 \times \cdots \times X_{168} \times Y_{169} \times \cdots \times Y_{|T|}] \text{ R} \\ B & := & \underbrace{X_1 \times \cdots \times X_{168}}_{\text{eine Bahn von } G_{168} \text{ auf } \{N_\rho | \rho = 1 \cdots |T|\}} \quad]S \end{array}$$

Es ist $A \underset{G}{\neq} B$, da $A = B^g \Rightarrow g$ perm. $1, \cdots, 168$ untereinander, $g \in G_1]\ G_{168}$, $\overline{R} \underset{\overline{G}_{168}}{=} \overline{S}$ Wid. (mit “—“ = mod G_1)

81/82

$\mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathfrak{X}G$

3.6.79 (1) $_{\mathfrak{X}}(G \times H) = {_{\mathfrak{X}}(G)} \times {_{\mathfrak{X}}H}$
Bew: $_{\mathfrak{X}}G \subseteq \mathfrak{L}_\pi G$, $\pi = \pi(\mathfrak{X})$

(2) Sei $A \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}{_{\mathfrak{X}}}G$, und zwar $A = G \cap B$, $B \in \mathcal{M}_{\mathfrak{X}}H$, $G \lhd\lhd H$. Sei $N \lhd H$ halbeinfach, $N_0 = N_\sigma^B \leq N$; N_1 die durch Entkoppelg. entstehende „Komponentengruppe“,

$$G_2 := \mathcal{N}_G(N_1) = \mathcal{N}_G(G \cap N_1).$$

Dann ist $A \in \mathcal{M}_{\mathfrak{X}}^{\lhd\lhd} G_1$

(3) $\tau \in$ Aut G lasse <u>alle</u> $A \neg G^\lambda$ fest, für ein $A \in \mathcal{M}_{\mathfrak{X}}G$. Darin läßt σ auch $A \cap$ Soc$'$ G fest.

82/83

$\mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathfrak{X}G$

Vermutg (4) $A, B \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathfrak{X}G$, $\langle A\neg G^\nu, B\neg G^\nu\rangle$, $\mathfrak{X}$-separiert (in ${}_p\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{G}'_\pi$) $\Rightarrow \langle A, B\rangle$ auch.

Vermutg (5) $A \in \mathcal{M}_\mathfrak{X}G$, $B \in \mathfrak{X}G$, für jedes λ gilt

$$A\neg G^\lambda = B\neg G^\lambda \ \underline{\text{oder}}\ B \leq \mathcal{N}(A\neg G^\lambda) \Rightarrow B \underset{G}{\leq} A$$

Bemerkg (6) $A, B \in \mathcal{M}_\pi G$, G einfach, $A \underset{\text{aut } G}{=} B \not\Rightarrow A \underset{G}{=} B$, z.B. $|A| = 24$, $|G| = 168$

Frage (7) Was folgt aus $H \leq G$, $H\neg G^\nu \rhd A\neg G^\nu$? $(A \in \mathcal{M}_\pi^{\lhd\lhd}G)$ über $\langle A, B, \cdots | A\neg G^\nu = B\neg G^\nu = \cdots\rangle$

Frage (8) Hat $A \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}\mathfrak{X}G$ Distributivitätseigenschaft bzgl. des Verbands der von A normalisierten Subnormalteiler von G? **???**: bezüglich $\{N | N \lhd G\}$

83/84

vor: $\underline{A, B, \ldots \in \mathcal{M}_\mathfrak{X}^{\lhd\lhd}G}$, $\{G_\lambda\}$ SNR; $\mathfrak{L}$

Vermut (1) $A\neg G^\nu = B\neg G^\nu = C\neg G^\nu = \cdots$, $E := \langle A, B, C, \cdots\rangle$ $H \in \mathcal{H}_\pi(E) \underset{?}{\Rightarrow}$ $H\neg G^\nu = A\neg G^\nu$?

(2) Daraus würde folgen: Die Anzahl der $A \in \mathcal{M}_\mathfrak{X}^{\lhd\lhd}G$ mit gegeb. Projektionen (in nicht $\mathfrak{X}$ serielle G^ν) ist eine π'-Zahl.

(3) Ist stets $A\neg G^\nu$ csn $B\neg G^\nu$, so ist $A\neg G^\nu = B\neg G^\nu$
Bew. erst für conormal

$3'$ Q: Was braucht man für Theorie „innerhalb von G“? Meth.: Indukt nach Index des größten $\mathfrak{X}$-Gr Normalteilers von G. Vielleicht Abgeschl. gegen Semi-nor Produkt und Erweit. mit $C_p, p \in \pi$?

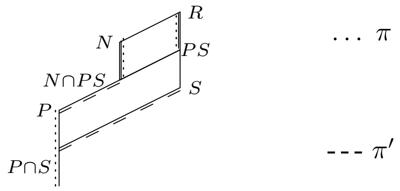
Hilfss. (4) Sei $S \lhd T$, $P \in \pi T$, $P \cap S \in \mathcal{H}_\pi S$. Dann gilt für $\widetilde{T} := T/S$:

a) $\overline{P} \in \mathfrak{L}_\pi\overline{T} \Rightarrow P \in \mathfrak{L}_\pi T$.
b) $P \in$ Intrav PS, $P \in \mathfrak{L}_\pi T \Rightarrow \overline{P} \in \mathfrak{L}_\pi\overline{T}$.
π- genügt
c) falls $S\pi$-seriell, ist $P \in \mathfrak{L}_\pi T \iff \overline{P} \in \mathfrak{L}_\pi\overline{T}$.
Bew:
a) $P \underset{\pi}{\trianglelefteq} Q \leq T \Rightarrow \overline{P}_\pi\overline{Q} \Rightarrow \overline{P} = \overline{Q}$;
$\Rightarrow |Q| = |Q \cap S| \cdot |\overline{Q}| = |Q \cap S||\overline{P}| \leq |P \cap S||\overline{P}| = |P|$; $Q = P$

84/85

$\mathcal{M}^{\lhd\lhd}$

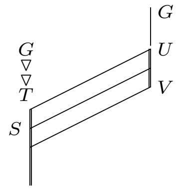
b) Sei $PS \underset{\pi}{\trianglelefteq} R$; $N = \mathcal{N}_R(P)$ deckt R/PS



N ist π-seriell, also gilt π-Sylowsatz, $P \leq Q \in \mathcal{H}_\pi N$, $P \underset{\pi}{\lhd} Q$, $P = Q$, $P \leq \mathcal{H}_\pi N$, $N = N \cap PS$, $R = PS$.

c) $\Leftarrow$ a,b.

Satz (5)



Sei T einköpf. perf. sn G, $A \in \mathcal{M}_{\mathfrak{X}}^{\lhd\lhd} G$. T/S einfach, $S\mathfrak{X}$-seriell, $\in {}_p\mathfrak{X}\mathfrak{X}'$ $(\pi = \pi(\mathfrak{X}))$, $V \underset{\max}{\lhd} U \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sic!}}}{\leq} G$, T decke U/V, $\boxed{\text{z.B. } V = C_G(T/S),\ U = TV}$.

Dann

$$A\neg T/S \cong A\neg U/V,$$

Bew: $A\neg T/S \in \mathfrak{L}_\pi T/S$ (4) $\to$ XV$_{239}$

(5′) Bem: In obigem Bild ist stets $C_G(U/V) = C_G(\frac{T}{S})$

(6) $T = T'$ eink sn G, $\mathfrak{X}\mathfrak{X}' \ni S \lhd\cdot\, G$, $\Rightarrow$ $A\neg T/S$ ist die größte $\mathfrak{X}$-Untergr von T/S, die von $\mathcal{N}_A(T)$ festgelassen wird.
Bew: $V := G_{\mathfrak{X}\mathfrak{X}'}$, $U = TV$ in (5), $\overline{G} = \overline{G}/U$.

85/86

$$A, B, \dots \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}{}_{\mathfrak{X}} G$$

Satz (7) Die Anzahl n der $A \in \mathcal{M}_{\mathfrak{X}}^{\lhd\lhd} G$ mit vorgegebenen Projektionen in eine SNR $\{G_\lambda\}$ ist eine π'-Zahl $(\pi = \pi(\mathfrak{X}))$. Genauer:
Wahrscheinlich genügen die ν statt λ.

$$n = \prod_\lambda \left| \mathcal{N}_{E^\lambda}(A^\lambda) : (\mathcal{N}_E(A)\neg E^\lambda) \right|$$

(7′) Also ist $n\big||G|_{\pi'}$.
Bew: Sei E das Erzeugnis aller dieser [Pfeil von $\mathcal{N}_E(A)$ auf E]; $E_\lambda = G_\lambda \cap E$ [Pfeil von E^λ auf E_λ]. Dann $A \neg G^\lambda = B \neg G^\lambda \iff A_h \neg E^\lambda = B \neg E^\lambda$. Rest folgt aus (8).
Sei h_0, h^λ die Anzahl der π-Hallgruppen von
[Das Folgende ist bis zum Beginn von 7* gestrichen mit der Bemerkung „unpräzis!“]
Da man durch Transf. in E (schrittweise in $E^1, E^2, \cdots, E^l$) die Hallgr. von E^λ beliebig als Projektion vorschreiben kann für die Hallgr. von E, so ist die gesamte Zahl n der Hallgr zur geg. Proj. $A \neg E^\lambda$ gleich $\frac{h}{\prod h^\lambda}$.

$$h = |E : \underbrace{\mathcal{N}_E A}_{N}| \qquad h^\lambda = |E^\lambda : \underbrace{\mathcal{N}_{E^\lambda} A^\lambda}_{M^\lambda_\lambda}|.$$

$$n = \frac{\prod |E^\lambda_\lambda|}{\prod |N^\lambda|} \cdot \frac{\prod |M^\lambda|}{\prod |E^\lambda|} = \prod_\lambda |\mathcal{N}_{E^\lambda}(A^\lambda) : \mathcal{N}_E(A)|$$

Verm. 7* $N \trianglelefteq G$, $C_{\mathfrak{X}}^{\triangleleft\triangleleft} N = 1 \Rightarrow C_{\mathfrak{X}}^{\triangleleft\triangleleft} G = C_{\mathfrak{X}}^{\triangleleft\triangleleft} G/N$
Vermutlich z.B. wenn N nilp. $\pi(\mathfrak{X})$-Hallgr hat

Bsp 7** $A \in \mathfrak{L}_\pi G$, $N \trianglelefteq G \not\Rightarrow A \cap N \in \mathfrak{L}_\pi N$

$$\text{z.B.} \qquad G = \text{ Sym } 4, N = A_4, \pi = \{23\}, \quad A \in \text{ Syl }_2 G$$

86/87

$$\mathcal{M}^{\triangleleft\triangleleft}$$

Satz (8) Sei E π -separabel / -serial , $\{E_\lambda\}_1^l$ SNR. Sei $H^{(\lambda)} \in \mathcal{H}_\pi(E^\lambda)$, $\lambda = 1 \cdots l$.
5.6.79 Dann:

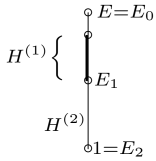
a) $\exists\ A \leq E$: $\blacktriangledown A^\lambda := A \neg E^\lambda = H^{(\lambda)}$, $\lambda = 1 \cdots l$ (also $A \in \mathcal{H}_\pi(E)$)
b) Die Anzahl n $(H^{(1)}, \cdots, H^{(l)})$ dieser A hängt nicht von der Wahl der $H^{(\lambda)} \in \mathcal{H}_\pi(E^\lambda)$ ab, es ist mit $h_\lambda := |\mathcal{H}_\pi(E_\lambda)|$, $h^\lambda = \cdots E^\lambda$.

$$n(H^{(1)}, \cdots, H^{(l)}) = \frac{h_0}{h^1 h^2 \cdots h^l}$$
$$= \left|\frac{(E)}{\mathcal{N}_E(A)}\right| : \prod \frac{|E^\lambda|}{|\mathcal{N}_E(A^\lambda)|} = \prod \left|\mathcal{N}_{E^\lambda}(A^\lambda) : (\mathcal{N}_E(A) \neg E^\lambda)\right|$$

NB: hiermit muß eine Formel für die A mit nur einem Teil vorgegeb. Proj. folgen!
von Interesse die von decken. G^λ herrühren.

Bew: $l = 0, 1$ klar.

I: $l = 2$:



E wirkt tra auf die Menge der Paare (X, Y) mit $x \in \mathcal{H}_\pi E^1$, $Y \in \mathcal{H}_\pi E^2 = \mathcal{H}_\pi E_1$. Daher gilt

$$n\big(H^{(1)}, H^{(2)}\big) = \overbrace{h_\pi(\sigma)}^{h_0} \,\big|\, \overbrace{h_\pi(E^1)}^{h^1}\,\overbrace{h_\pi(E_1)}^{h_1}.$$

II $l > 2$. Nenne Lösungen von A, B von $\blacktriangledown$ $\sim$, wenn $A_1 = B_1$.
Es gibt

$$n(H^{(2)}, \cdots, H^{(l)}) \text{ Gruppen}$$

$B_1 \in \mathcal{H}_\pi(E_1)$ mit $B_1 \neg G^\lambda = H^{(\lambda)}$; $\lambda = 2, \cdots, l$
für jede gibts nach I genau $h_0 | h_1 h^1$ versch. Lösungen A mit $A \cap E_1 = B_1$; das ist also die Lg der ÄqKlassen; daher

$$n(H^1, \cdots) = \frac{h_0}{h_1 h^1} n(H^{(2)}, \cdots) = \cdots =$$
$$\frac{h_0}{h_1 h^1} \cdot \frac{h_1}{h_2 h^2} \cdot \frac{h_2}{h_3 h^3} \cdots = h_0 / h^1 h^2 h^3 \cdots \quad G$$

87/88

$A \in \mathcal{M}^{\lhd\lhd}$: Entkopplung von $A \cap$ soc$'$

Vermutg (1) 5.6.79 Stellt man hier soc $=$ soc$'G$, G treu & monomial durch seine Wirkung auf soc$'G$ dar und ist $N =$ soc$'G \cdot\!\lhd G$, so daß die Koeff in S liegen $(N = S_1 \times S_2 \times \cdots))$, $S = S_1$ und bildet man $\widehat{G} := G$. diag$(\widehat{S})$, so läßt für $\widehat{A} \in \mathcal{M}_{\mathfrak{X}}^{\lhd\lhd}\widehat{G}$ stets $\widehat{A}_1$ eine maximale (nicht nur große) $\mathfrak{X}$-Ugr von $\widehat{S}_1$ fest, denn wenn die $\mathfrak{X}$-Gruppe $\widehat{A}_1$ auf die (nach Schreier auflösbare und daher $\mathfrak{X}$ - serielle) $\widehat{S}_1/S_1$ wirkt, läßt sie eine π-Hallgr. von $\widehat{S}_1/S_1$ fest:
Jede max $\mathfrak{X}$-Gr der Erweiterung deckt die π-Faktoren von $\widehat{S}/S$ und enthält daher eine π-Hallgr.
Dürfte stimmen.

Folge (1$'$) $\widehat{A} \cap$ diag $(\widehat{S}) = \bigtimes_{1}^{r} \widehat{M_\rho}$ mit $\widehat{M_\rho} \in \mathcal{M}_{\mathfrak{X}} \widehat{S}_\rho$

Hoffnung (2) Klassenzahl $m_{\mathfrak{X}}^{\lhd\lhd}(\widehat{G}) = m_{\mathfrak{X}}^{\lhd\lhd}(G)$, oder wenigstens
$m_{\mathfrak{X}}(\widehat{G}) = m_{\mathfrak{X}}(G)$.

(3) Folge von ($1'$): In jeder Klasse konjugierter maximaler $\mathfrak{X}$-Ugr von $\widehat{G}$ gibt es eine, die in jedem Transsystem T_ν der monom. Darstellung die Form
5.6.79 $M_\nu \wr P_\nu$ hat, wobei P_ν die zu T_ν gehörige Permutationsgruppe von $\widehat{G}_\phi$ ist, mit $\Phi =$ der Funktion, die jedem ν eine Klasse konjug max. $\mathfrak{X}$-Ugr. von $\widehat{S}$ zuordnet; $P_2 \in \mathcal{M}_\mathfrak{X}$ Perm G_ϕ.

88/89

$M^{\lhd\lhd}G$ und $M^{\lhd\lhd}G/N$

(4) Nach Rückkehr von Santa Cruz ist mir klar geworden, dass für $\varphi \in$ Hom G mit π-sep. Kern N:

$$A \in \mathcal{M}_\mathfrak{X}^{\lhd\lhd}G \iff A \cap N \in \mathcal{H}_\pi(N), \quad \varphi(A) \in \mathcal{M}_\mathfrak{X}^{\lhd\lhd}\varphi(G)$$

Habe ich das nirgends notiert? doch XV 247(48), 231 ($6'$)

(5) Sei $G = E \wr H = NH$; E sei perfekt, direkt unzerlegbar und enthalte 2 nicht isomorphe maximale $\mathfrak{X}$-Untergruppen. Dann enthält N eine maximale $\mathfrak{X}$-Untergruppe, deren Normalisator in G ein vorgeschriebene Projektion in G/N hat.

FRAGE (6) In welcher Hinsicht sind die submaximalen X-Untergruppen von G maximal? Vielleicht bezüglich einer Eigenschaft bezüglich Ausschnitten von G, die auf $\mathcal{N}_A(X)$ Bezug nimmt?

89/90

Cartergr, $\mathcal{M}_\mathfrak{X}$

Fr. 1 Enthält in einer auflösbaren G jeder Sylow-Norm-Turm eine Cartergruppe von G?
NEIN: $G =$ Sym$_4, \pi = \{3, 2\}, |C| = 2^3$

Fr. 2 Folgt aus $A \in \mathcal{M}_\mathfrak{X}G$; $S, T \in$ sn G und $S \cap T = 1$, $ST = TS$ stets

$$A \neg ST = (A \neg S)(A \neg T)?$$

Fr. 3 Welche π-großen Untergruppen eines $S \in$ sn G sind Schnitte von S mit max. π-Ugr'en von G?

Fr. 4 Sei $A \in \mathcal{M}_\mathfrak{X}G$. Kann man von Pojektionen von A in eine „abstrakte“ Komp. Fakt Gr von G reden? Dh. ist

$$|A \neg G^\lambda| = |A \neg H^\mu|$$

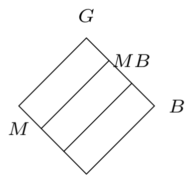
wenn G^λ, H^μ Faktoren in zwei Komp-Reihen $\{G_\lambda\}$, $\{H_\mu\}$ sind mit gleicher einköpfiger subnormaler Deckgruppe S?
Ja, wenn Rumpf von S auflösbar. Nein i.A.:

Gegenbeispiel mit $G \underset{\varphi}{\twoheadrightarrow} H = E_1 \times E_2$, $E_i \cong \mathrm{Alt}_5, \pi = \{2,3,5\}$, so daß $\exists\ A \in M_\pi G$ mit $\varphi(A) =$ diag $E_1 \times E_2$, S deckt KE_1/K und $|K\,E_1\,E_2/\,KE_2$ ($K :=$ Kern φ). Dann: [teilweise von S. 91 übernommen]: $A\neg KE_1/K = 1$, $A\neg KE_1E_2/KE_2 = E_2$.
Frage: Kann statt 1 bzgl. E_i jedes Paar $F_1 \le E_1$ $F_2 \le E_2$ mit $F_1 \underset{\text{iso}}{\le} F_2$ erreicht werden? Das zeigt drastisch, daß i.a. $\mathcal{M}_\pi G$ nicht die Distribut.-eig. hat bzgl. sn G.

90/91

$\lhd\lhd$ Zentralisatorsatz

1. $M \cdot\!\lhd G$ endlich, $B \lhd A \lhd\lhd G$, $A/B \in \mathfrak{N} \Longrightarrow M$ zentralisiert A/B.
   Bew: Gegenb. G, B min. $A < G \Rightarrow A \le G_0 \lhd G \Rightarrow [M, A] \ne 1$, $M \le G_0$,
   $M \ge M_0 \cdot\!\lhd G_0$, M_0^g zentr A/B, $M \le \langle M_0^g \rangle_g$
   $\therefore$ also $\underline{A = G}$; wegen $B_{\min}$ $\quad B = G^{\mathfrak{N}} \trianglelefteq G$



   $M \not\le B$; $MB/B \cdot\!\trianglelefteq G/B$, $B = 1$ (somit $\overline{G} = G/B$)
   $[M, G] <$ somit $[M, G, \cdots, G] =$, aber $G \in \mathfrak{N}$.
   $[M, G] = 1$ $[M, A] = 1 \le B$ Wid.

Q Ähnlich für $A^{\cdot\cdot G}$?

[Die Seitennummer 91 tritt zweimal hintereinander auf.] 91/91

$\lhd\lhd$ Subnormaler Kern

1. $A \le G$ endl $\Rightarrow$

$$A_{\cdot\cdot G} = \bigcap_{g \in G} A_{\cdot\cdot\langle A, g\rangle}$$

Bew:

$$A_i := A_{\cdot\cdot G_i}, A \leq G_i := \langle A, g_i\rangle$$
$$A_i \text{ sn } G_i \quad A_k \leq A \leq G_i$$
$$A_i \cap A_k \text{ sn } G_i \cap A_k = A_k$$
$$A_i \cap A_k \text{ sn } A_k \text{ sn } G_k$$
$$D \text{ sn } G_k = \langle A, g_k\rangle \quad D \leq A$$
$$D \text{ sn } D, g_k \qquad \forall g_k \in G$$
$$D \text{ sn } G. \quad D \leq A_{\cdot\cdot G} \leq A_{\cdot\cdot\langle A,g\rangle} : \bigcap_g .$$

91/92

$\lhd\lhd$ <u>Subnormalitätskriterien für p-Untergr.</u>

30.7.79 1. $A \leq G$ endl, $A \in \mathfrak{N}$, dann $A \cdot \Phi(G)$ sn $G \iff A$ sn G
Bew: OBdA: $|A| = p^\alpha$
Def. H:

$$H/\Phi(G) := O_p(G/\Phi(G)) \geq A\Phi(G)/\Phi(G); \quad A \leq H$$

z.B. $A \leq B \in p$-Syl H, $H = B \cdot \Phi(G) \lhd G$
$(B \leq)$ $\mathcal{N}_G(B)$ deckt $\Phi(G)B/\Phi(G)$, $G/B\Phi(G)$,
deckt $G/\Phi(G), B \lhd G$.

$\lhd\lhd$ <u>und Kommutierung</u>

2. Satz: $S \lhd\lhd$ endl, $A \leq G \Rightarrow [S, A]$ sn G
Bew: $[S, A] \trianglelefteq \langle S, A\rangle \trianglelefteq S^A$ sn G

Allgemeiner:

Satz 3. $S \lhd\lhd G$ endl. oder noethersch, $A \subseteq$ aut $G \Rightarrow [S, A]$ sn G.
Bew:

$$\begin{array}{rcl} [S,A] & \lhd & \langle S, [S,A]\rangle \\ & = & \langle S, [S, a_1], \cdots\rangle \\ & = & \langle S, S^{a_1}, \cdots\rangle \text{ sn } G \end{array}$$

92/93

Innere Automorphismen

Nachtrag 20.10.81:

Vermutg 1 $(|G| < \infty)$, $\sigma \in$ Aut G, $\forall H \geq G \ \exists \tau \in$ aut $H : \tau\big|_G = \sigma$
$\Rightarrow \sigma \in$ Inn G

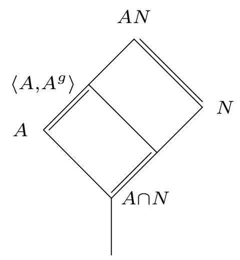
2 Beweis für $G = C_{p^\gamma}$, $p > 2 : q := p^\gamma$
Wähle
$$H = \langle a, b | a^{q^2} = b^q = 1, a^b = a^{1+q} \rangle$$
H ist nilpotent von Klasse 2, also $(uv)^p = u^p v^p; G := \langle b \rangle$
$\exists s, x, y \in \mathbb{Z} : b^\sigma = b^s, a^\sigma = a^x b^y$. Aus $a^b = a^{1+q}$ folgt
$(a^x b^y)^{b^s} = (a^x b^y)^{1+q}$. Hieraus
$$a^{s(q+1)} = a^{q+1} \qquad s \equiv 1 \ \ (q)$$
$$b^\sigma = b^s = b; \sigma|_G = \text{id} \ \in \ \text{Inn } G.$$

3. Aufgabe für Russen: Vermutg 1.

93/94

Normalisierung. Maier. Clifford

1. Ein allgemeiner Normalisatorsatz $A \leq G \ni g$, A besitze keinen nichttriv. Hom. auf Abschnitte von $\langle g^A \rangle$, $A^g \leq \mathcal{N}(A) \Rightarrow g \in \mathcal{N}(A), g \in \mathcal{C}\left(A/_{A \cap N}\right)$
Bew:



$N := \langle g^A \rangle \qquad a \mapsto g \circ a \bmod A \cap N$ ist Hom.

2. Erweiterung des Problems von Maier 40_6:
$$A \text{ sn } \langle A, B \rangle, \quad A \text{ sn } \langle A, C \rangle, \quad BC = CB \overset{?}{\Rightarrow} A \text{ sn } \langle A, B, C \rangle$$
Gegenbeispiel suchen !

3. Verallgemeinerung des Satzes von Clifford:
Ist $A \lhd\lhd G$ und M ein vollreduzibler G-Modul, so auch ein vollreduzibler A-Modul.

94/95

Sylownormalisator-Türme

1. Nicht jeder SNT (für $\pi = \mathbb{P}$ in vorgeg. Ord.) von $G \in \mathfrak{S}$ enthält eine Cartergruppe von G.
z.B. $G =$ Sym 4, $|C| = 8$, $|\text{SNT}| = 6$.

2. Jeder SNT einer aufl. Gr. enthält einen System-Normalisator.
   Bew: [Zu jedem System-Nor. S $\exists$ Turm $T \geq S$, zu vorgegebener Anordnung]
   Zu Turm T $\exists$ Sylowsystem $\sum_G$ von G, das T in Sylowsyst. $\sum_T$ schneidet (wie zu jedem $H \leq G$). Dann $\mathcal{N}\sum_G \leq T$. Dann ist $\mathcal{N}\sum_G \leq \mathcal{N}\sum_T$.

95/96

[Seite 96 ist leer!]

96/97

Intravar. Ugr von p-Gr.

(1) Eine p-Gr. P enthalte einen char. Ausschnitt A/B (also A, B char P, $A < B < P$) vom Typ (p, p) derart, daß nicht jede Zwischengruppe normal in P ist. Dann $\exists$ $I, B < I < A$, I intravariant in P, aber nicht charakteristisch

Bew: Wähle I beliebig mit $.B < I < A, I \ntriangleleft P$. Dann, da es genau $p+1$ Ugr zwischen A und B gibt, $\left|\{I^x\}_{x \in p}\right| = p$ einzige Klasse dieser Länge.

(2) Ebenso wenn $A/B \cong C_p \times C_p \times C_p$, I und $\left|P : \mathcal{N}_p I\right| = p^2 :\Rightarrow I$ intra P.
Bew: da es nur $p^2 + p + 1$ Zwischengr. gibt, kann es keine weiteren geben, deren Konj.- Klassen aus p^2 Stück besteht.

Bsp. (3) P enthalte einen char. Ausschnitt $\cong C_p \wr C_p$. Dann kann P nicht als min. Suppl-Schnitt auftreten. Ebenso wohl für $C_p \wr C_p \wr C_p, \cdots$ G

97/98

[Seite 98 ist leer!]

98/99

AB: Faktorisierte Gruppen

(1) $G = AB$, $A_0 \lhd A$, $B_0 \lhd B$, $P \in$ Syl $(A_0 \cap B_0) \Rightarrow \mathcal{N}_G(P) =: N$ “zerfällt“: $N = (N \cap A)(N \cap B)$.
Setze $D := A \cap B$.

(2) Desgl. zerf.:

$$\mathcal{N}\langle A_0 \cap D, B_0 \cap D\rangle$$
$$\text{für } P \in p - \text{Syl } \langle A_0 \cap D, B_0 \cap D\rangle : \mathcal{N}(P)$$

Bew: $P \cap \langle A_0 \cap D\rangle \in p - \text{Syl}$

(3) Desgl.

$$\mathcal{N}\langle A_i \cap D, B_k \cap D \big| i, k\rangle$$
$$\mathcal{N}_P\Big(\langle A_i \cap D, B_k \cap D \big| i, k\rangle\Big) \text{ ist } P(\quad) := \text{ eine } p\text{-Syl von}$$

(4) Statt P kann man Thompsons $J(P)$ nehmen: allgemeiner das Erzeugnis einer Klasse isomorpher Untergruppen von $P(\langle A_i \cap D\rangle)$; das führt zum Zerfall von $\mathcal{N}\langle J_i(P\cap A_i), J_k(P\cap B_k)\rangle$ mit $P \in p$-Syl S.

Satz (5) $G = AB$ wirke auf $\Omega, |\alpha^A| \not\equiv 0 \not\equiv |\alpha^B|$ $(p \in \mathbb{P})$. Dann $|\alpha^G| \not\equiv 0$.
Das heißt: $\pi(|\alpha^G|) \leq \pi(\alpha^A) \cup \pi(\alpha^B)$.
Bew: 43_1

99/100

AB

(1) Wenn X und Y "gemäß AB zerfallen", so auch $X \cap Y$, sofern $D := A\cap B \leq X$ oder $\leq Y$.

(2) Jede Obergr. von $D = A \cap B$ liegt in einer kleinsten „total zerfallenden". [d.h $ab^- \in X \Rightarrow a, b \in X$.]

(3) Zu Maiers Vermutung:
Ist $G = AB$ ein <u>minimales</u> Gegenbsp; $S = S'$ einfach $\lhd\lhd \frac{A}{B}$, $S \notin$ sn G, $D <= A\cap B$, $|G : D| = p^{\cdot\cdot}, p\big||S|, A_1 \lhd A$, $[A_1, S] = 1$, $B_1 \lhd B$, $[B_1, S] = 1$, so ist $\underbrace{A \cap B_1}_{M}$ eine p'-Gruppe.
Bew: $M \lhd D, S \lhd D$, Ann$|M|_p > 1$.
Sei G_p eine beliebige p-Sylowgruppe von G und Z ihr Zentrum. Dann schneidet G_p D in einer p-Sylowgr D_p und daher $M_p := G_p \cap M \neq 1$, $D_p := G_p \cap D \neq 1$; $[S, M_p] = 1$.

100/101

AB

$G^* := \mathcal{N}_G(M_p)$ zerfällt gemäß AB, also wegen Minimalität: S sn G^*. Es ist $Z \leq G^*$ und $[Z, D_p] = 1$, also <u>normalisiert</u> Z die subnorm. Hülle von D_p in G^*, d.h.
Mit $N := \langle$ Zentren aller p-Sylowgr. von G $\rangle$ ist $S \lhd SN$ sn G. Wid.
[Im Text wurde an einigen Stellen die im Tagebuch unvollständige Korrektur D_p statt p eingetragen.]

NB Statt $|G : D| = p^{\cdot\cdot}$ genügt: Jede p-Syl Gr von G schneidet D voll. Forts. (5)

(4) Ein allgemeineres Verfahren zur Konstruktion „total zerfallender" Ugruppen von AB: Wähle $A_1 \leq A$, $B_1 \leq B$. Seien so genau die $|\langle A_i, B_i\rangle|\big|^{i\in I}$ minimal unter den Ordnungen $\big\{|\langle A_1^a, B_1^b\rangle|\big|a \in A, b \in B\big\}$. Dann zerfällt $\mathcal{N}_G\{\langle A_i, B_i\rangle\}_{i\in I}$ total.

(5) Zu Maier mit ständ Vor in $S, S', \cdots$, $N \cdot\!\lhd G$, $|N| = p^\alpha$:
Es ist $G = NA, N \cap A = 1$; $A \cong B$. Für $A^* \leq A$ ist $\underline{\mathcal{N}_G(NA^*) = N\mathcal{N}_A(A^*)}$ wegen $G = NA$. Ferner ist für $Z \leq$ Ztr $P \in p$-Sy $\overline{G}$:

$$\underline{\mathcal{N}_G(Z) = \mathcal{N}_A(Z)\mathcal{N}_B(Z)} \quad \text{allgem. } (5')$$

wegen

$$\mathcal{N}_G(Z) = P\mathcal{N}_D(Z) = (P \cap A)\{P_A B | \mathcal{N}_B(Z)\} \leq \mathcal{N}_A(Z)^B \mathcal{N}_B(Z)$$

(aus $G = PD$)

101/102

AB

(5) $H \geq P \in p-$Syl $G \Rightarrow H = (H \cap A)(H \cap B)$
Bew:

$$\begin{aligned} H &= P.(H \cap B) \\ &= (P \cap A)\underbrace{(P \cap B)(H \cap B)} \\ &\leqq (H \cap A)(H \cap B) \end{aligned}$$

(5″) $z \in Z(P)$, $P \in p$-Syl G, S sn $\langle S, z\rangle \Rightarrow S \lhd \langle S, Z\rangle$
Bew: z zentralisiert $P \cap S \neq 1$, läßt also die subn. Hülle von S in $\langle S, z\rangle$ fest, d.i.S selbst.
gilt sogar für $\forall\ z \in N$! Bew: $s \mapsto (s, z)$ ist Hom(S, N), da $S \lhd \langle S, S^z\rangle \Rightarrow S = S^z$. $S \lhd \langle S, S^z\rangle$.

Allg:

(6) g liege im kleinen Subnormalisator der einf. perf. Gr. S und lasse ein Elt von $S^\#$ in S. Dann $g \in \mathcal{N}(S)$.

(5‴) Kein $z \neq 1$ in Ztr P läßt irgend eine Konjugierte von $\begin{cases} D \text{ oder} \\ T. \end{cases}$ fest.
Denn (wegen $D, T \lhd D, G = DP$) P wirkt tra auf $\{D^g | g \in G\}$, also läßt z alle fest, desgl. $z^G = N$, $S \lhd NS \lhd\lhd G$.

102/103

AB: Maier

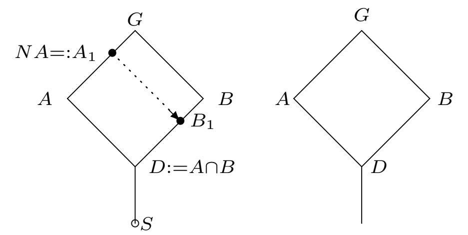
Endlich: Satz 1 2.9.7 Sei $G = AB$, $S \lhd\lhd {}^{A}_{B}$, $\mathfrak{S} \ni N \lhd G$, SN sn G. Dann ist S sn G.
Dh: jedes minim. Gegenbsp. G gegen Maier hat perfekten Sockel.

Gegenb. $(G\ A\ B\ S\ N) : |G|\ |N|$ min. $|A|, |B|$ max.

a) $N_{\min} \lhd G$. Wähle $M \leq N$, $M_{\min} \lhd G$, $\overline{G} = G/M$; $|\overline{G}| < |G|$ gibt MS sn G wegen $|N| = \min$ ist $M = N$. Sei $|N| = p^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}$

b) $A_G = 1 = B_G$? nötig?

c) $NA = G = BN$.



d) $|G:A| = p^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}$ $|G:B| = p^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}$ $|G:D| = p^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}$. Sei $P \in p$-Syl G.
[Pfeil verweist auf eine Position zwischen c) und d).] Hier besser Hilfssatz: Vor. $1 + N \cdot\!\lhd G, N' = 1, NA = NB = G, N \cap B = 1$ $\Rightarrow [N:S] = 1$.
Vielleicht genügt $N \cap A \cap B = 1$, da P vtb $A, \cdots, D; S$ sn D.

e) P trifft A, B, D, S voll

f) $Z(P)$ zentralisiert eine p-SylGr von S $(= P \cap S)$.

g) $\exists z \neq 1$, $z \in N \cap Z(P)$ wegen $N \lhd P$.

h) z zentral. eine q-Sylowgr Q von S, wenn $p \neq q \in \mathbb{P}$.
Bew: Wähle $R \in q$-Syl D. $\exists ab$: $b = az$
R, R^a sind q-SylGr von A, da $|A:D| \not\equiv 0(q)$.
$Q := R^a \cap S \in q$-Syl S: $\forall_{x \in Q} \exists_{y \in R} x^z = r^{az} = r^b \in B$.
$x \equiv r^b(N)$, da $z \equiv 1(N)$, $x \equiv r \equiv 1(B)$, $x \equiv r^b = x^z$, $[Q, Z] = 1$

i) $[z, S] = 1$

j) ebenso $[z^g, S] = 1$; $z^G = N$, $S \lhd SN$ sn G Wid.

103/104

AB: Maier “Subnormalität in faktorisierten Gruppen“

Satz 2 $G = AB$, S sn $\begin{cases} A \\ B \end{cases}$, $S = S'$ einfach (oder auch nur: ${}^*S$ von Involutionen erzeugte perfekt einköpfig)
$\Rightarrow S$ sn G.

Frage: 2a Sei $i \in A \leq G$, $i^2 = 1$, $A = \langle i \rangle^A$. Für jedes $u \in G$ mit $u^i = u^-$ und $|\langle u \rangle| \in \mathbb{P}$ gelte $u \in A$. Ist dann A sn G?
Bew:

$$T := \langle S^g \big| g \in G, S^g \text{ sn } \begin{cases} A \\ B \end{cases} \rangle \text{ sn } \begin{matrix} A \\ B \end{matrix}$$

$S \le T \le \mathcal{N}T^a \cap \mathcal{N}T^b$, $\forall a \in A, b \in B$.
Sei t eine Involution in T und i ein zu t eng konjugiertes El't von G: $i \underset{\langle i,t\rangle}{=} t$
Zu zeigen: $i \in T$:
$\exists\ i =: a^- b \quad b = a^i$,
T normalisiert T^a sowie $T^b = T^{ai}$
T^i normalisiert daher $T^{ai} = T^b$ sowie $T^a = (T^{ai})^i$
$t \in T \le \langle T, T^i\rangle \lhd \langle T, i\rangle$, $t \underset{\langle i,T\rangle}{=} i$, also $i \in \langle T, T^i\rangle \le \mathcal{N}T^a$,
$T^a = T^{ai} = T^b$ sn ${}^A_B$, $T^a = T = T^b$, $\mathcal{N}(T) \ni a, b, a^- b, i$,
$t \in T \lhd \langle T, i\rangle$, $t \underset{\langle \Gamma,i\rangle}{=} i$ also $i \in T$.

H.Satz 3 $G = AB$, S sn ${}^A_B \Rightarrow S$ sn G.

3^* A sn B_i, $B_i \wp B_k \Rightarrow A$ sn $\prod B_i$

5.9.79 Bew: Satz 1, Satz 2, 40_7 genügt für $|S| = p$: In min Gegenb. $\exists R_1 = R_1'$ sn S, R_1 einfach (2): R_1 sn G; $R_1^g \lhd N := R_1^G$; $R := \langle R_1^g \big| R_1^g \le A \cap B\rangle'$.
$\mathcal{N}_G(R)$ zerfällt gemäß AB; $\mathcal{N}_G(R) = G$, sonst S sn $\mathcal{N}_G(R) \ge N$;
S sn NS sn G Wid..
Also $N = R \le A \cap B \le A$. S sn NS sn G.

104/105

Kleiner Subnormalisator
Länge Konjugiertheit

5.9.79

FRAGEN: 1 $A \le G$, $b, c \in G$; A sn $\langle A, b\rangle$, A sn $\langle A, C\rangle$ $bc = cb \underset{?}{\Rightarrow} A$ sn $\langle A, b, c\rangle$?

$1'$ Wenn der kleine Subn. von A in G zu jedem $p \in \mathbb{P}$ eine p-Sylowgr. von G enthält, ist dann A sn G?
Was, wenn er für festes p alle p-SylGr v. G enthält?

Bem: 2 Sei $A \le G$, $M \subseteq G$, $M \underset{\langle M,A\rangle}{\subseteq} A$. Dann ist $M \subseteq A^{\langle M\rangle}$
Bew: $\langle M\rangle \le A^{\langle M,A\rangle} = A^{\langle\langle M\rangle,A\rangle} = A^{\langle M\rangle}$

3 Bsp: Sei $T \le G$ eng konjugiert zu einer Ugr. von A. Dann

$$T \le A^T.$$

[Pfeile von H.Satz 3 auf S. 104 auf (3,5) und die Fragen 4 und 5):]

(3,5) $A \wp B \subseteq \mathrm{sn}_G^I(A) \Rightarrow A$ sn $G := AB$
Bew: $\langle A, g\rangle = \langle A, b\rangle$

Frage 4 Folgt aus $G = AB$, $S \leq G$, $S \lhd\lhd \langle S, a\rangle\ \forall a$, $S \lhd\lhd \langle S, b\rangle \forall b$

stets $S \underset{(k)}{\text{sn}} G$?

ja für $S = S'$ einf $\widehat{A} := \langle S, A\rangle, \widehat{B} := \cdots$

Verallg. v. Maier Frage 5 Folgt aus $A \wp B \wp C \wp A$, $B \cup C \subseteq \ \text{sn}_G(A)$ stets

A sn ABC ?

105/106

AB

(1)

$$\underset{|G|<\infty}{A < G} = AB\} \Rightarrow B \not\subseteq \bigcup A^g = \bigcup A^b$$

Sonst $\forall\ b \exists b_1 : b \in b_1^- A b_1 \cap B = (A \cap B)^{b_1}$

$$B = \bigcup_b (A \cap B)^b = \bigcup D^b \quad B = D = A \cap B \quad B \leq A \quad G = A \text{ Wid.}$$

106/107

$\lhd\lhd \Rightarrow \lhd$ Normalisatorsatz, wann $A \subseteq \mathcal{N} B$?

16.9.79

Satz Eine p-perfekte Gruppe A wirke auf eine Gruppe H und zentralisiere die A-Kompositionsfaktoren von H, welche p-Gruppen sind. Dann

a) zentralisiert A jeden A-Subnormalfaktor von G, der p-Gruppe ist;
b) A normalisiert jeden rein p-köpfigen Subnormalteiler B von H und zentralisiert B/B^p.

Bew:

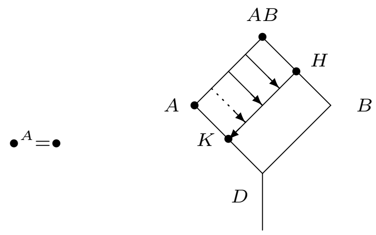
a) A ist p-perf. und zentralisiert den p-A-Faktor schichtweis.
b) OBdA sei $H = B^A$. A normalisiert $Q := H^{\wp\wp'}$, wo $\wp = \{C_\wp\}$ $\wp' = \mathfrak{E} - \wp$
$H = H^\wp B$, da $H^p \leq H\textbf{???} \leq H$ und $H/H^\wp$ von A zentralisiert wird (a); also $B^A \leq (H^\wp B)^A = H^\wp B \leq H \cdot \alpha := \wp\wp'$.
Wegen $B^{\wp'} = B$ ist $H = H^{\wp'} = H^{\wp\wp'} B^{\wp'} B$
$H = BH^\alpha \Rightarrow H^\alpha = B^\alpha H^{\alpha^2}$, $H = BH^{\alpha^2}; \cdots; H = BH^{\alpha^n} = B$
Nun ist B/B^p ein p-A-Faktor, wird also nach a) von A zentralisiert.

107/108

$\lhd\lhd \Rightarrow \lhd$

Satz 2 $A = A^p$ sn G, $B = B^{\wp'}$ sn G dh jeder Kopf von B ist $\cong C_p$; A zentralisiere alle p-Hauptfaktoren von $A \cap B^A$. Dann $B^A = B$ und A zentralisiert die p-Fakt v. B.
Schärferes gilt bei p-Auflösbarkeit.

Bew: Satz 1: $AB = BA \cdot H := B^A$,

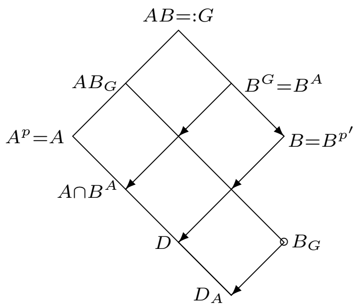


A zentr die A-Kompfaktoren von AB bis A (weil A sn AB), also die von H bis K, und nach Vor. die von K. Also die von H.

Satz 3 Sei $A = A^{\wp}$ sn G, $B = B^{\wp'}$ sn G. Für $B = B^A$ ist notw. + hinr., daß A die p Hauptfaktoren von $A \cap B^A$ bis D_A zentralisiert, wo $D := A \cap B$.
NB: A zentral. dann die p-Faktoren von B/D_A.
Bew:

$$D_A = (A \cap B)_A = A \cap B_A = A \cap B_{BA} = A \cap B_G$$

$B_G = B_{BA} = B_A$, $A \cap B_G = D_A$, $\overline{G} := G/B_G$ usw.



Frage: Beziehung zu Schmid ?

108/109

Normalisator-Satz: $\lhd\lhd \rightarrow \lhd$

Satz 4 Ist $\overline{A}$ sn G und ist jeder p-Hauptfaktor von $\overline{A}$ zentral, so normalisiert

16.9.79 (a) jeder p-perfekte Subnormalteiler A von $\overline{A}$ jeden Subnormalteiler B von G, der von p Elementen erzeugt wird ($B = O^{p'}B$).

(b) jeder A sn $\overline{A}$, $A = O^{p'}A$, jeden perfekten SNT B von G, der $B = O^{p'}B$ hat.

Bew: (a): 3; (b) 4 Folge: 7

Satz 5 Ist E eine einfache nichtabelsche Gruppe, A sn G, so normalisiert A einen E-köpfigen Subnormalteiler B von G genau wenn A das Erzeugnis der E-köpfigen SNT von $D = A \cap B$ normalisiert.

Zusatz 4′ für 4(b) genügt auch, daß jeder Hauptfaktor von zwischen $A \cap B^A$ und $A \cap B$, der $\cong E \times \ldots \times E$ ist, sogar $\cong E$ selbst ist.

NB 6 Die Subnormale Hülle einer Thompson-Untergruppe von A ist charakteristisch in A.

109/110

$\lhd\lhd \to \lhd$; Sockelsatz

7 Sei a im Zentrum einer 2-SylGr eines Subnteilers von G und $A = \langle a \rangle^{\cdot\cdot G}$. Dann normalisiert A und jeder zu A isomorphe Subnormalteiler von G jeden perfekten Subnormalteiler B von G.
Bew: A normalisiert jeden seiner perfekten Subnormalteiler. 109(4′)

Eine Verallgemeinerung des Sockelsatzes:
Großer Sockelsatz:

Satz 8 Sei M/M_0 ein Hauptfaktor von G; sei S sn G, und kein Kopf von S sei $\cong$
17.9.79 zu einem Kompositionsfaktor von M_0, so ist $M \leq \mathcal{N}(S)$
Bew: $M_0S \lhd MS$; für $\mathfrak{K} = \{$ Köpfe $S\}$ ist

$$S = (M_0S)^{\mathfrak{K}} \lhd MS.$$

110/111

Kosubnormalität

Satz 1 Sei B eine gegen Hom von $J := \langle A, \cdots, A_n \rangle$ invariante Bedingung für
17.9.79 $\{A_1, \cdots, A_n\}$, welche zusammen mit
$A_i \in \mathfrak{G}_p$ und A_i, A_k kosubnormal $\forall i, k$ zur Folge hat: $J \in \mathfrak{G}_p$. Dann folgt aus A_i beliebig, A_i ksn A_k $\forall ik$ und B stets: Jedes A_i sn J $(i = 1 \cdots n)$

Bew: Min Gegenb: $|J| + \sum |A_i| = \min \exists A_i \not\in$ sn J

(a) Wegen A_i sn A_iN, $N = \langle A_1^{\mathfrak{N}} \cdots A_n^{\mathfrak{N}} \rangle$ ist $N = 1$, alle $A_\sigma \in \mathfrak{N}$

(b) $\exists p$: $p(A_i) \notin$ sn J. Hierfür $Q := \langle A_1^{p'}, \cdots, A_n^{p'} \rangle = 1$.

$$p(A_i)Q \lhd A_iQ \text{ sn } J \text{ wenn } Q \neq 1.$$

(c) also alle $A_j \in \mathfrak{G}_p$, dann $A_i \leq J \in \mathfrak{G}_p$ A_i sn J Wid.

Bsp: (2) A, B, C pw ksn, $A \wp \langle BC \rangle \Rightarrow A, B, C$ sn J.

FRAGE: Ähnliches bei Kriterien für A_1 sn $\langle A_1, \cdots, A_n \rangle$

111/112

Kosubnormalität und Vertauschbarkeit

Satz 1 Sei $A_i \leq G$, $(i = 1 \cdots n)$, A_i csn A_j $\forall i, j$.
17.9.79 Genau dann ist jedes A_i sn $\langle A_1, \cdots, A_n \rangle =: J$, wenn J aus den $A_1, \cdots, A_n$ durch folgende Operationen gewonnen werden kann, kurz:
$J \in \mathfrak{H}(A_1, \cdots, A_n)$:

a) $X, Y \in \mathfrak{H}$ und $XY = YX \Rightarrow XY \in \mathfrak{H}$

b) $X \leq Y \leq \mathfrak{H} \Rightarrow X \leq \mathfrak{H}$

c) $X \in \mathfrak{H}, g \in J \Rightarrow X^g \in J$.

FRAGE Ähnliches für A_1 sn J? ja: 116 $(1')$
Bew: Die Bedgg ist homom.-invariant, und wenn alle $A_i \in \mathfrak{G}_p$, so auch alle $X \in \mathfrak{H}(\{A_1, \cdots, A_n\})$. Nun 111_1.

Bem 2 NB: Ist X sn $\langle X; Y \rangle$, so $\langle X; Y \rangle \in \mathfrak{H}(X; Y)$.

Bem 3 Sind $A, B, C \leq G$ und $C = ABA$, so kann die Ordnung von C andere Primteiler haben, als solche $|A|$ und $|B|$.
Bsp: $A = \langle (12) \rangle$, $B = \langle (23) \rangle$ $C =$
Fortsetzg. 115

112/113

Remak: $\lhd\lhd$ Eindeutigkeit von Deckgr.

(1) Wenn G nur einen einzigen Kompositionsfaktor $\cong E$ hat, gibt es dazu auch nur eine einzige einköpfige sn Deckgruppe, nämlich $G^{\{E\}'}$

(2) Wenn E ein Kopf von G ist, der im Rumpf R von G nicht mehr vorkommt, so ist die zur E-Komponente von G/R gehörige minimale sn Deckgruppe eindeutig bestimmt: $G^{\{E\}'}$

$\lhd\lhd$ und Permut.-Gr.

(3) Ist G eine primitive P-Gruppe und S sn G, so ist jeder Konstituent von S treu.

Subnormalisatoren

Def:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0(A,G) &:= \{g \in G \big| A \text{ sn } \langle A, g\rangle\} \\ \mathcal{S}_1(A,G) &:= \{g \in G \big| A \text{ csn } A^g\} \end{aligned}$$ [unvollständige Korrektur sinngemäß ergänzt!]

Satz (1) $A, H \leq G$, $H \subseteq \mathcal{S}_1(A,G) \Rightarrow H \subseteq \mathcal{S}_0(A^{\mathfrak{N}}, G)$ ja sogar $A^{\mathfrak{N}}$ sn $\langle A, H\rangle$

Bew: $\forall h \in H$: A^h csn A. Nach XV 196(4) ist

$$A^{\mathfrak{N}} \text{ sn } \langle A^h \big| h \in H\rangle = A^H \lhd \langle A, H\rangle.$$

Frage (2) Folgt aus $N \trianglelefteq G$, $N \subseteq \text{ sn}_G A \cap \text{ sn}_G B$ stets $N \subseteq \text{ sn}_G\langle A, B\rangle$?

Unters. (3) Subnormalisator nach Bartels, Schluß der Diss.

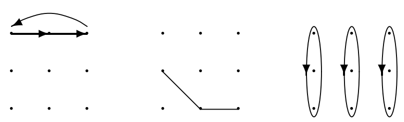
Vorschlag (4) (Nachtrag 26.1.80) $\text{Subn}_G A = \{g$, die wenigstens eine meiner verschied. Bedingungen erfüllen$\}$

(5) Axiomatisch verlangen könnte man von $\mathcal{S}n_G A$:

$$\begin{gathered} \mathcal{S}n_G A \cap \mathcal{S}n_G B \leq \mathcal{S}n_G(A \cap B), \\ U, V \subseteq \mathcal{S}n_G A, \quad UV = VU \Rightarrow UV \subseteq \mathcal{S}n_G A. \end{gathered}$$

Kosubnormalität

Bsp (1) Es gilt für jede Primzahlpotenz $q \geq 3$ vier elementar abelsche Permutationsgr. der Ord q auf $\Omega = \{1, \cdots, q^3\}$, von denen je 3 kosubnormal sind mit Erzeugnis $A \times$ Alt q^2 (oder $\times$ Sym q^2)
z.B. $q = 3$: Würfel mit 3 Ebenen und D zykl Perm d Ebenen spurtreu.



Bsp (2) Geht man von diesem Beispiel über zu $X = A, Y = B^A$, $Z = C^A, U = D^A$, so sind $\{XYZU\}$ paarweise kos. und es ist X vtb mit Y, Z, U; jedoch ist nicht X sn $\langle XYZU\rangle$.
Das widerlegt Vermutung XV 196 $(3')$

Def.: "Vertauschbar erzeugt":

(3) Kosubn. + Vertauschbarkeit:
Def: Seien $A_1, \cdots, A_n \leq G$. Sei $\mathfrak{H}(A_1, \cdots, A_n; G)$ die Menge der Untergruppen von G, die

115/116

Kosubn. + Vertauschbk.

sich ausgehend von $A_1, \cdots, A_n$ so konstruieren lassen:

„Vertb. Erzeugg.“ (c) $Y \leq X \in \mathfrak{H} \Rightarrow Y \in \mathfrak{H}$

(a) $X_0 Y \in \mathfrak{H}$ und $XY = YX \Rightarrow XY \in \mathfrak{H}$

(b) $Y \underset{G}{=} X \in \mathfrak{H} \Rightarrow Y \in \mathfrak{H}$ (auch (e) $X, Y \in \mathfrak{H}, X$ csn $Y \Rightarrow \langle X, Y \rangle \in \mathfrak{H}$ kann man beutzen).

Dann gilt:

Satz 1 Seien $A_1 \cdots A_n$ paarweise kosubnormale Untergr. von G, sei

$$G = \langle A_1, \cdots, A_n \rangle.$$

Verallg. 119 Genau dann sind alle A_ν sn G, wenn $\bigcup \{X \big| X \in \mathfrak{H}(A_1, \cdots, A_n)\} = G$.
(kurz: Wenn $G = \overline{\langle A_1, \cdots, A_n \rangle}_{\wp}$)
Bew: Notwendigkeit ist klar, da für X, Y sn $G \langle XY \rangle \in \mathfrak{H}(X, Y)$. vermöge (a) und (b).
Hinr.: Die Bed. ist inv. gegen Hom von J, und wenn alle $A_\nu \in \mathfrak{G}_p$, so enthält $\mathfrak{H}(A_1 \cdots A_n)$ nur p-El'te, also ist dann $G \in \mathfrak{G}_p$.
Entsprechend

Satz 1′ Genau dann ist A_1 sn J, wenn $A_1^G \subseteq \bigcup(\mathfrak{H})$

Bsp: $\{A_\nu\}$ pw csn und

$$\{A_1 \cdots A_5\} \text{ csn }, \{A_5 \cdots A_{10}\} \text{ con }, \langle A_1, \cdots, A_5 \rangle \wp \langle A_5 \cdots A_{10} \rangle \Rightarrow A_\nu \text{ sn } J.$$

Forts. 119

116/117

Verallgemeinerte Subnormalität

Aufgabe: (1) Das Zentral. -& Invertierungskriterium von ROSEBLADE auf ℓsn und ℓsnℓ erweitern.

(2) Weitere Verallgem. der hom. Subn:
A weakly subnormal in G: $\Longleftrightarrow$
A $(\ell\text{sn})^k G$ oder $(\ell\text{sn}\ell)^k G$ für passendes $k \in \mathbb{N}$.

Rechenregeln aufstellen !
Es ist z.B. wahr, daß

$$X \lhd Y \ \ell\mathrm{sn}\ell \ G \Rightarrow X \ \ell\mathrm{sn}\ell \ G,$$

aber für $X \ \ell\mathrm{sn}\ell \ Y \lhd G$ ist's offen.
Jeder Begriff führt zu einem Radikal: z.B. $\langle g \rangle$ wℓsn G.

(3) Bsp. für $\mathrm{Rad}_{\ell\mathrm{sn}\ell}\, G > \underbrace{\mathrm{Rad}_{\ell\mathrm{sn}}}_{C_{2^\infty}} G \ : \ G < C_{2^\infty}]C_2$
hier $= G$

FRAGE (4) Gibt's Normalisatorsätze für subn. Kerne?

117/118

ℓsnℓ etc.

(4) Vielleicht ist $A = A' \ \ell\mathrm{sn}\ G$, $B \ \ell\mathrm{sn}\ G \Rightarrow A \wp B$ zu beweisen mit Verschärfung des sn-Satzes:
Wenn B $\mathrm{sn}^k G$ $A(\circ A)^r \wp B$ für passendes $r = f(k)$.
Methode Brewster-Roseblade

119.9 Beschreibe die maximalen Simplizes im KSn-Graph.

119.8 Weiß man was über auflösbare, ksn erzeugte G?

119.7 Zieht schwache Vtbkeit der A^g Subnorm. nach sich, wenigstens wenn $G \in \mathfrak{S}$?

119.6 Nenne Menge $\mathfrak{M}$ Ugr von G schwach vtb, wenn $\langle M \rangle$ ein U-Produkt von innen ist: Schrittweise durch konj. $A_1^{a_2}$ und $A_1 \leq \mathcal{N} A_2 \Rightarrow A_1 A_2$.

119.5 :$\{G_i\}$ paarweise ksn. Dann: Genau dann erzeugen die G_i ihr Erzeugnis G “vtb“, wenn sie es lokal tun, d.h. nach Proj ihrer Konj in je eine p-Sylowgr von G.
äqu: Wenn sie lokal **???** haupterzeugen.

119.4 Seien A, B p-Ugr, $\langle A, B \rangle = ABA$. Ist $\langle A, B \rangle$ p-Gr. [Verweispfeil hierauf von S. 119]

Ich hatte doch mal einen Satz über $\langle A, B, C \rangle$, wo A, B sn G, aber $C \leq G$. Wo ist er?!
muß „einseitige“ Kosubn. Vorauss. erlauben [Verweispfeil hierauf von S. 119, Frage 3]

118/119

Kosubnormalität und Vertauschbarkeit

Hauptsatz 1
18.9.79
(Forts. v. 116)

Seien $A_1 \cdots, A_n$ paarweise vertauschbar und kosubnormal. Dann besteht jedes Gegenbeispiel mit minimalem $|J|$, $J = \langle A_1, \cdots, A_n \rangle$, gegen die Vermutung, daß eine gewisse homomorphie-invariante Bedingung hinreicht für $B :=$ sn J, aus lauter p-Gruppen mit gleichem p.

Damit erweitert sich 116_1 entsprechend.

Bew:

a) Alle $A_\nu^{\mathfrak{N}} = 1$ sonst ihr Erz. $N \neq 1$, BN sn J; aber B sn BN (sogar A_i sn BN $(i = 1 \ldots k)$ XV 196 (3).

b) Ang. $\exists\, p \neq q \in \mathbb{P}$ mit $\substack{p \\ q}$ teilt $\prod |A_\nu|$.

$$J \rhd \begin{cases} J' := \langle A'_\nu \rangle & A'_\nu = p\text{-Syl } A_\nu \\ J'' := \langle A''_\nu \rangle & A''_\nu = p\text{-Kpl } A_\nu \end{cases}$$

J', J'' $(= \langle A^p_\nu \rangle)$ sind $\lhd J$ [XV 195 (1)], $J = J'J''$

Wäre $J' \cap J'' = D \neq 1$, so $D \leq Z(J)$, da $[J', J''] = 1$ $([A'_\rho A''_\sigma] = 1)$

Min gibt BD sn J, aber $B \lhd BD$. Also $J' \cap J'' = 1$.

$\Rightarrow BJ'' \cap BJ'$ sn G, mit $B' := \langle A'_\kappa \big| \kappa = 1 \ldots k \rangle$ aber $B'J'' \cap B''J' = B'(J'' \cap J'B'') = B'(J'' \cap J')B'' = B'B'' = B$.

Also alle A_ν p-Gruppen.

Frage 2. Genügt es für A sn G, wenn sich A^G als "vertauschb. Produkt" von konjugierten A^g darstellen läßt?

Frage 3 Genügt A_1 sn $\langle A_1, A_2 \rangle$, A_2 sn $\langle A_2 A_3 \rangle$, A_3 sn $\langle A_3 A_1 \rangle$

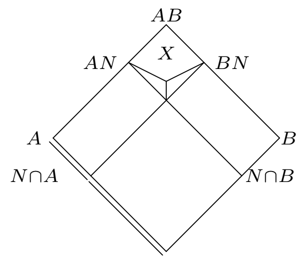
119/120

AB: Vertauschbarkeit $A \wp B$

(1) Für $AB = BA$ genügt es nicht, wenn zu jedem p SyGr A_p csn B_p existieren. Sonst würde aus $A_0 \lhd A \wp B$ folgen $A_0 \wp B$, oder einfacher: P-Gr $G = \langle A, B \rangle \not\Rightarrow A \wp B$.

(2) Aus $N \lhd AB$ folgt nicht $N = (N \cap A)(N \cap B)$.
Bew: sonst wäre jede Ugr einer faktorisierenden p-Gr. fakt. Aber:

(3) Aus $N \lhd\lhd B$, $\big(\overset{\pi}{|A|}, \overset{\pi'}{|B|}\big) = 1$ folgt $N = (N \cap A)(N \cap B)$; es genügt sogar $N \wp A$, $N \wp B$.
Bew: Wegen $N \wp A$ ist $N \cap A \in \mathcal{H}_\pi(A)$, und allgemein $X = X_\pi \cdot X_{\pi'}$, wenn $X_\pi \in \mathcal{H}_\pi(X)$..
$X := AN \cap BN$, gibt $|\overset{\pi}{X} : \overset{\sigma}{N}| \in \pi \setminus \sigma; = 1$.



(4) Sei $G = G_1G_2$, $G_1 \cap G_2 = 1$; $A, B \le G$, beide zerf. $D := A \cap B$. Dann $D = (A_1 \cap B_1)(A_2 \cap B_2)$

Titel: Disjunkte Faktorisierungen

???Satz (4*) $G = G_1G_2$, $G_1 \cap G_2 = 1$, $A = A_1A_2$, $B = B_1B_2 \le G$. $A_1 \le A$ etc. $D = A \cap B$, $E = AB$. Dann

a) $D = D_1D_2$, $D_i = A_i \cap B_i$

b) $E = E_1E_2$, $E_i = A_iB_i$

Bew:

a) $d = a_1a_2 = b_1b_2$, $d_i = a_i = b_i \in D$, $D \subseteq (D \cap A_1)(D \cap B_1) :=$
$A_i = G_i \cap A \cdots$

b) $|C| = \frac{ab}{d} = \frac{a_1a_2b_1b_2}{d_1d_2} = \frac{a_1b_1}{d_1} \cdot \frac{a_2b_2}{d_2} = |A_1B_1| \cdot |A_2B_2| = |A_1B_1\ \ A_2B_2|$
$C = A_1B_1A_2B_2 \subseteq (C \cap G_1)(C \cap G_2)$ da $A_1B_1 \subseteq G_1$, $A_2B_2 \subseteq G_2$

Das muß auch für $|G| = \infty$ gelten! Beweis?

120/121

pq-Gruppen
besser p-aufl. $X, Y \le G$

20.9.79 Stets sei $|G| = p^\alpha q^\beta$, $S, T, A, B, \ldots \le G$, $A_p \in p\text{-Syl}\ G$

Df. G pk rein p-köpfig (oder pk G)
pe p erzeugt
pf p-füssig
pz jeder <u>normale</u> p-Faktor zentral;
hpz Haupt-zentral: jeder p-Hauptfakt. zentral
$pZ(G) = \langle \cup\ Z(G_p) \big| G_p \in p\text{-Syl}\ G \rangle$

(1) $H \le G$ $G^{pq} = 1 \Rightarrow H$ $hpz \iff H^{pq} = 1$ (Jordan-Hölder)

(2) G $hpz + qk \Rightarrow G$ pz kurz: $hpz \cap qk \subseteq pz$

(3) $A, B \in$ sn G; A, B $pz + qk \Rightarrow \langle A, B\rangle$ auch

(4) $A\ pz\ qz \iff A \in \mathfrak{N}$ kurz: $pz \cap qz = \mathfrak{N}$

(5) $A\ hpz,\ B \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{N}$

(6) $\left\{ \begin{array}{c} pz\ A \text{ sn } G \\ B \text{ sn } G \end{array} \right\} \Rightarrow A^p \leq \mathcal{N}(B^q)$ genügt $A\ hpz$

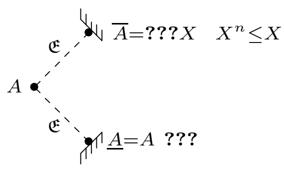
(7) A sn $pZ(G) \Rightarrow A\ pz$ Geht J^G statt $Z(G)$?

(8) $hpz\ pf\ A \Rightarrow A$ p-Gruppe

(10) $pz(G) \leq \mathcal{N}S$ und zentralisiert die p-Intervalle 122 $\forall\ \ S \in$ sn G sogar für $K =$ Baers Kern statt Z
$hpz = p$ nil , $pz = pn$ & G_p ab
$G = PQ,\ P_0 \lhd P,\ Q_0 \lhd Q \Rightarrow H := \langle P_0, Q_0 \rangle = (H \cap P) \cdot (H \cap Q)$ wenn $(|P||Q|) = 1$

Aufg Potenzkalkül für sn Ausschnitte
$A \underset{\mathfrak{E}}{\sim} B \iff A$ und B vertauschbar durch eine Kette von $\mathfrak{E}$ Schritten $\iff A^{\mathfrak{E}} = B^{\mathfrak{E}}$ ist Äq., mit $\wedge$ und $\vee$ verträglich $\iff (\underline{A} = \underline{B}) \iff \langle \overline{A} = \overline{B} \rangle$

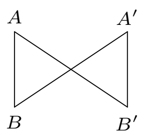
NB: $\underline{A \cap B} = \underline{A} \cap \underline{B}$



121/122

(1) $A \cap G_p = B \cap G_p \iff A \underset{p'}{\sim} B_p$ wo $p' = \{$ einf $S, p \nmid |S|\}$

(2) „Intervalle“ $\mathfrak{x} = A : B$ B sn A sn G wenn



$$\begin{aligned}
\mathfrak{x} \cup \mathfrak{x}' &:= \langle A, A' \rangle : B \cap B' \\
\mathfrak{x} \cap \mathfrak{x}' &:= (A \cap A') : \langle B, B' \rangle \\
\mathfrak{x} \wedge \mathfrak{x}' &:= (A \cap A') : (B \cap B') \\
\mathfrak{x} \vee \mathfrak{x}' &:= (A \cup A') : (B \cap B')
\end{aligned}$$

sind verträglich mit $\mathfrak{E}$ (oder noch mehr distributiven Operatoren ?!)

(2) Das Erzeugnis von Zerfall SNT und einer weiteren Ugr zerfällt **???**.

Programm: Subnormalverband einer aufl. p-q-Gruppe in festem „Koordinatensystem“ $G = P.Q$ untersuchen mittels 120(4*).
Die “Kord“ einer Ugr sind unabhängig von Links oder Rechts
Darstellung: $H = PQ = QP$
Wann ist $P_1Q_1 \underset{p}{\lhd} P_2Q_2$?
Was ist $(PQ)'$?

pq

(1) $H \leq G = pq$-Gr ist genau dann subnormal, wenn H in jedem "Koord-System" $G = PQ$ zerfällt (nach Kegel)
Bedeutung der Schur-Komplexe?

(2) $G = PQ$ auflösbar $\Rightarrow$ jede subnormale p-Untergr. von G liegt in P.

Hilfss (3) G p-auflösbar, $G = PQ$, $Q \in \mathcal{H}_\pi G$, G nur p-Füsse (dh $O_{p'}(G) = 1$)
$\Rightarrow$ der schwache Abschluss von $Z(P)$ in P liegt in $Z\,\underbrace{O_p(G)}_{\text{kurz: } R}$.
Und wenn A ein maximaler abelscher Normalteiler von R ist, so ist $\mathcal{C}_G(A)$ eine p-Gruppe. Denn die p'-El'te darin würden R zentr., aber G ist p-günstig nach Hall-Higman.
Das gleiche gilt sogar für jeden maximalen unter den abelschen Normalteilern A von R, die unter einer willkürlich vorgegebenen Untergruppe $H \leq G$ invariant sind. (d.h. $\lhd\, RH$). (Das gibt neues A z.B. in Aut B wo $|B| = 27$, $B' \neq 1$, $\exp B = 3$.

123/124

Ist $H \lessdot PQ$ einf., H aufl., so ist

$$O_p(H) = \bigcap \{P^g \big| P^g \text{ schneidet } H \text{ voll }\}$$

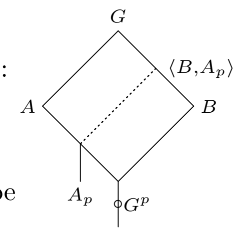
124/125

$\lhd\lhd$ Vertauschungssatz

24.9.79

Vermutg. 1 A, B sn G, $A \wp B \Rightarrow O_p(A) \wp B$

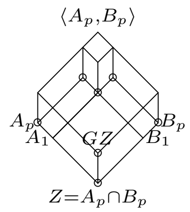
Steckengebliebener
Bew: Gegenbsp $|G|$ min. Dann

sonst: 

Wid: $A_p \wp B$

a) $G = \langle B, A_p \rangle$
b) $A^p = B^p = G^p \lhd G$
c) $G^p \cap G_p = 1$ sonst $= N$: gibt $A_p N B$ Gruppe
d) $[G_p, G^p] = 1$
Wähle $P \in p$-Sy G. Dann
e) $G = P \cdot G^p$ da $|G/Gp| = p^{\cdot\cdot}$ (b)
f) $\exists Z \leq$ Ztr $P \cap G_p$, $|Z| = p$ da $1 < G_p \trianglelefteq P$
g) $Z \leq Z(G)$ (d,e)
h) $A_p B_p \subset A_p B_p Z =$ Gruppe [kommt bei j mit heraus]

i) $\frac{|\langle A_p, B_p\rangle|}{|A_p B_p|} = p \quad \therefore \langle A_p, B_p\rangle = A_p B_p Z$ (denn $\leq p$, und > 1 und $= p^\alpha$)

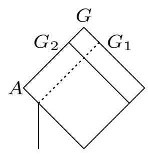


j) $A_p B_p Z \trianglelefteq G$

$G^* := \mathcal{N}_G(\langle A_p, B_p\rangle)$ zerfällt, $= A^* B^* \quad G^p \underbrace{\leq A^* \leq}_{p^{\cdots}} G$, also A^* sn G

$$A_p \leq A^*, \text{ daher } A^* = A, \langle A_p, B_p\rangle \trianglelefteq G.$$

k) $\exists\ A_1 \underset{p}{\lhd} A_p,\ A_1 \wp B,\ A_1 \lhd A.$

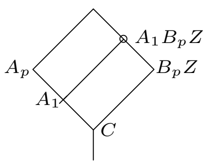


$B \leq G_1 \underset{p}{\lhd} G,\ A_1 := G_1 \cap A_p$, ebenso $G_2, B_2 \underset{p}{\lhd} B_p$
Klar: A_p^p normalisiert B_p'', wenn A, B csn $|A : D| = |B : D| = p$
$|G : D| = p^\alpha$

125/126

noch vermuteter Vertauschungssatz

(l) $A_1 \cdot (B_p Z) \trianglelefteq G$, da $\underset{1}{\lhd} A_p B_p Z$.
ebenso $B_1 A_p Z \trianglelefteq G$
Bew wie k.



(m)

Nachtrag 18.10.81:

2. Aus Vermutung 1 folgt: Sind A, B p-Gruppen und $A \wp B$, und ist $N \trianglelefteq AB$, so ist $A \wp (B \cap N)$ (Wahrscheinlich auch $2 \Rightarrow 1$).
Bew: Lasse AB mit Kern N auf Q wirken, wo Q keinen Kompindex p hat.

126/127

Verallg. von $\lhd$, sn in endl. Gr.;
sn G

(1) s. Avinoam Mann, On sgps of finite solvable gps I-III
Sonderdruck 1972-73

(2) $|G| < \infty \Rightarrow$ sn $G \overset{\sim}{\leq}$ sn H für geeignetes $H \in \mathfrak{S} \cap sG$.
z.B. $H = \pi =$ Sylow-Norm-Turm wo

$$\begin{cases} \pi \ni 2 & \text{wenn } G \text{ nicht } \in \mathfrak{S} \\ \pi \ni p & \text{wenn } p \text{ Kompos.-Index von } G. \end{cases}$$

127/128

$M\mathfrak{X}G$ und Verwandtes

Aufgabe (1) Bestimme die $A \leq G$ mit der Eigenschaft: Ist $B \leq G$ und gibt es eine Kompositionsreihe von $H := \langle A, B\rangle, \{H_\mu\}_\mu^m$ so daß die Projektionen $A\neg H^\mu = B\neg H^\mu$ (evtl nur für die nichttrivialen H^μ), so ist $A \underset{\langle A,B\rangle}{=} B$.
Ersteres für $G \in \mathfrak{S}$, letzteres für $G \notin \mathfrak{S}$ in erster Linie.

Aufgabe (2) „Schreiersche Wirkung“ von A auf G?

FRAGE (3) Haben die Fitting-Injektoren F in auflösb. G die Injektoreigenschaft auch in jeder Zwischengruppe H?. JA Fischer-Gaschütz-Hartley, Satz 2

sm$_\mathfrak{X}$ FRAGE (4) folgt aus $A \in$ sm$_\mathfrak{X}G, A \in \mathfrak{y} \subseteq \mathfrak{X}$, auch $A \in$ sm$_\mathfrak{z}G$?

(5) $A, B \in$ sm$_\mathfrak{X}G$, übereinstimmende Projektionen in die dicken Ein-Hüte $\underset{?}{\Rightarrow} A \underset{\langle A,B\rangle}{=} B$?

(6) $N \trianglelefteq G = NA$, $G/N \in \mathfrak{X}$, $A \cap N \in$ sm$_\mathfrak{X} \underset{?}{\Rightarrow} A$ sm$_\mathfrak{X}$ G?

Eine allg. Def. von relativmaximal in G könnte etwa so sein:
maximal mit Bezug auf die folgenden Konstruktionsmittel: Konjugation, Untergruppen, seminormale Produkte.

Gegenbsp: A sm$_X G$, $A \leq G_1 \leq G \not\Rightarrow A$ sm$_X G_1$; z.B. wenn G_1 s_X G nie. Man kann also nicht gleichzeitig Verträglichkeit mit Zwischengruppen und Normalt. erreichen.

128/129

Distributivität von Funktoren

Satz:
9.11.79 Vor:

1) $\alpha :$ sn $G \to$ sn G (G endl.)

2) A, B sn G, $AB = BA \Rightarrow (AB)^\alpha = \langle A^\alpha, B^\alpha \rangle$

3) $\alpha^2 = \alpha$

4) $A^{g^\alpha} = A^{\alpha g} \quad \forall\, g \in G$

Dann ist α distributiv: $\langle A, B\rangle^\alpha = \langle A^\alpha, B^\alpha\rangle\ \forall AB \in$ sn G.
NB: Selinka hat das unter der Zusatzvor.: α hom-vererblich 2-10
Bew: Gegenbeispiel $(G, A, B) : |G|$ min, dann $|G : A| + |G : B|$ min.

a) X sn $Y \Rightarrow X^\alpha \leq Y^\alpha$

b) $G = \langle A, B\rangle$ sonst $G \to \langle A, B\rangle$

c) $AB \neq BA$

d) $H := G^\alpha \leq \mathcal{N}(A)$ sonst

$$\begin{array}{rcl} H = G^\alpha & = & \langle A^H, B\rangle^\alpha = \langle A^{H\alpha}, B^\alpha\rangle \\ & = & \langle A^{\alpha H}, B^\alpha\rangle \\ = \langle A^{\alpha H}, B^{\alpha H}\rangle & = & \langle A^\alpha, B^\alpha\rangle^H \end{array}$$

Nach a) ist $A^\alpha, B^\alpha \leq G^\alpha = H$, sn H, $= H$

e) $N := \langle A^\alpha, B^\alpha\rangle \leq A$ sonst $G^\alpha = \langle (AN)^\alpha, B^\alpha\rangle$ (nach d)

f) $N \leq A \cap B < G = \langle A^\alpha, N^\alpha, B^\alpha\rangle = \langle N, N^\alpha\rangle = N$

g) $N^\alpha = \langle A^{\alpha^2}, B^{\alpha^2}\rangle = \langle A, B\rangle = N \leq A$

h) $N = A^\alpha$ Bew: $N = N^\alpha \leqq A^\alpha \leq N$; $A \leq \mathcal{N}(N)$

i) $N \trianglelefteq G = \langle A, B\rangle$

j) $G^\alpha = \langle A^G, B^G\rangle^\alpha = \langle A^\alpha, B^\alpha\rangle^G = N^G = N$

NB: Will man ohne Vor. 3 auskommen, so kann man annehmen, daß α^2 distributiv ist. Dann ist wohl

$$G^{\alpha^2} = N^\alpha, G^\alpha \leq A \cap B$$

129/130

Subnormalkriterium à la Kegel

Satz (1) A sn $\langle A, P\rangle\ \forall P \in$ Sylowgrupp. $G \Rightarrow A$ sn G

Frage (2′) genügt es, wenn zu jedem $p \in \mathbb{P}$ ein $P \in p$-Syl G existiert mit

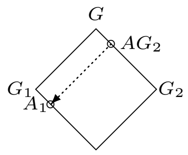
$$A \text{ sn } \langle A, P\rangle?$$

$M\mathfrak{X}G$ etc. "sn erblich große Ugr'en"

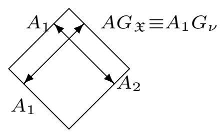
9.11.79 (1) „???schneidet jede in G (kovariante) subnormale? Untergruppe normalisatorgleich" .

(2) $\{G_\nu\}^n$ SNR $G \Rightarrow$ Man kann $A_{n-1} \in \mathfrak{L}_\pi G_{n-1}$ vorschreiben und zu einem $A \leq G$ ergänzen, derart daß stets $A \cap G_\nu \in \mathfrak{L}_\pi G_\nu$ ist $\nu = 0, \cdots, n-1$.
Bew: Wähle $A_{\nu-1} \in S_\pi G_{\nu-1}$ mit A_ν sn $A_{\nu-1}$. Ebenso für $S_X G_{\nu-1}$
So erhält man alle Fortsetzungen von A_{n-1}.

(3) $A\mathfrak{L}_\pi(G_1 \times G_2)$, $A_1 := A \cap G_1 \quad \underset{(AG_2 \cap G_1)}{\mathfrak{L}_\pi G_1} \Rightarrow \begin{cases} A = A_1 \times A_2 \\ A_2 \mathfrak{L}_\pi G_2 \end{cases}$ Bew:



$A \;\; G_\nu A$ haben gl. Proj.; $AG_2 \cap G_1 = A \Rightarrow A \notin \mathfrak{L}_\pi G$.
also



Bsp. (4) $\mathfrak{L}_\pi -$ sm$_X \neq \emptyset$, z.B. $G =$ Alt G, $|A| = 6$, $A' \neq 1 \Rightarrow A \in \mathfrak{L}_\pi G$ $\pi = 2, 3$, $A \notin$ sm$_X G, \forall X$ $A \leq G_6$

sn-erblich große π-Ugr.

12.12.1979 Bsp. (1) Aus $A \in m_\pi G$, $B \in S_\pi G$, $B \neg G^\lambda \leq A \neg G^\lambda \forall \lambda$ folgt nicht $B \underset{G}{\leq} A$.
$G =$ Sym 5, $|A| = 6$ mit Bahnlängen $3, 2, A \leq$ Alt 5
$|B| = 4$, $b^2 \in A$; etwa $A = \langle(123), (23)(45)\rangle$, $B = \langle(2435)\rangle$

(2) $\forall \nu$ $A^\nu \mathfrak{L}_\pi G^\nu \Rightarrow A\mathfrak{L}_\pi G$

(3) Sei $A \cap G_\nu \mathfrak{L}_\pi G_\nu$. Dann glw. für $B \in S_\pi G$:

a) $\exists\{G_\nu\}$ $A^\kappa B = A^\kappa$ für die kritischen κ ($G^\kappa \notin \mathfrak{S}$)

b) $A \in \mathcal{H}_\pi A^G$, A^G π-sep, $B \underset{A^B}{\leq} A$? [? Mit Hinweis auf 133(3)]

14.12.79 (4) Sei

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & G \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & \\ G_1 \arrow[dr, no head] & & G_2 \arrow[dl, no head] \\ & G_0 & \end{tikzcd}$$

$|G_2 : G_0| = p$, $A\mathfrak{L}_\pi G$, $A_i := A \cap G_i$, $A_1\mathfrak{L}_\pi G_1$, $A_0\mathfrak{L}_\pi G_0 \Rightarrow A_2\mathfrak{L}_\pi G_2$
vermutlich genügt $G_2/G_0 \le Z(G/G_0)$ statt $|\cdot\cdot| = p$.
Bew:
Sonst $A_2 \underset{\pi}{\lhd} C \le G_2$ $C\neg G^2 > A\neg G^2$,

? $A\neg G^2 = 1$, $A_2 = A_0$. C normalisiert also $A\neg G/G_0$,

? $A\neg G_0$ und somit ist $C \underset{\langle A,C\rangle}{\le} A$, A deckt G_2/G_0.

$A_2 \ne A_0$ Wid.

132/133

l_π und sn

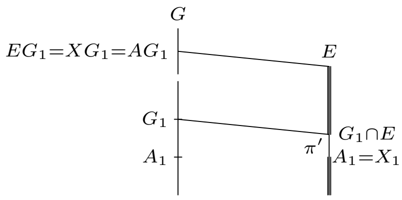
16.12.79 Df. Schreibe l_π statt bisher $\mathfrak{L}_\pi$ (große π Ugr.)

Sei $A \underset{\pi}{\le} G = G_0 \trianglerighteq G \trianglerighteq \cdots G_n = 1$, $\begin{cases} A^\nu := A\neg G^\nu \\ A_\nu = A \cap G_\nu \end{cases}$

(1) $A^\nu l_\pi G^\nu \forall\nu \Rightarrow Al_\pi G$ lasse $_\pi$ weg.

(1′) Klar: $A\ l\ G$, $A \le H \le G \Rightarrow A\ l\ H$

(2) $G \trianglerighteq G_1$, $A_1\ l\ G_1$, $E := \left\langle X \le G \,\middle|\, \begin{matrix} XG_1 = AG_1 \\ X \cap G_1 = A \cap G_1 \end{matrix} \right\rangle \Rightarrow E$ π-sep, jedes $X\underset{\text{Hall}}{h_\pi}E$, $\#\{X\}$ teilt $|E|_{\pi'}$
Bew:



$\forall X \le AG_1$ $E \le AG_1$
$EG_1 = AG_1 = XG_1$
$X \le \mathcal{N}A_1$ $\quad E \le \mathcal{N}A_1$, **???**$^\pi \big|E \cap G_1 : A_1\big| \in \pi'$

(3) $As_\pi G,\ A_\nu l G_\nu\ \nu = 1 \cdots n,$

$$E := \langle \mathfrak{X} \rangle := \left\langle X \le G \,\middle|\, \begin{array}{c} XG_1 = AG_1 \\ X^\nu = A^\nu \quad 2 \le \nu \le n \end{array} \right\rangle$$

$\Rightarrow E$ π-sep, jedes $X h_\pi E$, $\#\{X\}$ teilt $|E|_{\pi'}$ Bew?

(4) $A \in \mathfrak{L}_\pi G \cap$ sn $G \Rightarrow A \trianglelefteq G$
Bew: sonst $A \lhd \langle A, A^g \rangle$

133/134

(4) $\widehat{G} \rhd G \rhd G_1$

$$As_\pi G,\ Bs_\pi \widehat{G},\ A_1 l_\pi G_1,\ B \le \begin{cases} \mathcal{N} G_1 \\ \mathcal{N}(AG_1) \\ \mathcal{N}(A \cap G_1) \end{cases}$$

$\Rightarrow B \le \mathcal{N} A^t\ \exists t \in G_1 A \cap \mathcal{N}(G_1 \cap A)$

Bew: $E := \langle \mathfrak{X} \rangle := \langle X \le G \big| XG_1 = AG_1, X \cap G_1 = A \cap G_1 \rangle$
$b \in B \Rightarrow\ X^b G_1 = (XG_1)^b = AG_1\ X^b \cap G_1 = A \cap G_1\ E^b = E,\ B \le \mathcal{N} E$
(2): E π-sep , EB π-sep .
$\exists\ H \in h_\pi EB,\ B \le H,\ B \le \mathcal{N}(H \cap E) H \cap F \in h_\pi E.$
$\exists t \in BE : H \cap E = A^t,\ B \le \mathcal{N} A^t;\ E \le G \cap A \cap \mathcal{N}(G_1 \cap A)$

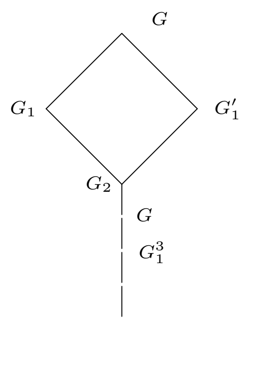
Hilfssatz (4*) $G \rhd G_1,\ As_\pi G \begin{cases} A \cap G_1 l_\pi G_1, \\ B \le s_\pi \text{ Aut } G \end{cases},\ B \le \begin{array}{c} \mathcal{N} G_1 \\ \mathcal{N} AG_1 \\ \mathcal{N} A \cap G_1 \end{array}$

$\Rightarrow B \le \mathcal{N} A^t,\ \exists t \in G_1 A \cap \mathcal{N}(G_1 \cap A)$ (4)

Gegenbsp. (5) Schliersee 19.12.79 Eine Ugr $A \le G$, welche die Bilder G_ν <u>einer</u> Kompositionsreihe in großen π-Ugren schneidet, braucht dies für benachbarte Kompositionsreihen <u>nicht</u> zu tun

Bsp:

$$G/G_2 = G/G_1 \times G/G_1' \qquad \underset{\cong A_5}{|} \qquad \underset{\cong A_5}{|}$$



134/135

$A\neg G/G_2 = \langle(1\,5)(2\,4)(6\,10)(7\,9)\rangle$,
$C\neg G/G_2 = \langle(6\,7\,8\,9\,10)\rangle$
Bilde $\bigtimes_{60^2} A_5$, setze das unter $A_5 \times A_5$.
Wähle maximale $\pi = \{2,5\}$-Untergruppen H in $\bigtimes_{60^2} A_5$ derart, daß ihr Normalisator in $G := A_5$ wr $A_5 \times A_5$ gerade $AC\neg G/G_2$ deckt
$G_1/G_2 := A_5 \times 1$, $G_1'/G_2 := 1 \times A_5$.
Dann $Al_\pi G$, da aus $A \lhd N \in s_\pi G$ folgt $N \le \mathcal{N}H$, $N\neg G/G_2 \le AC$, und $A \in l_\pi AC$, $A \cap G_1 = A \cap G_1' = A \cap G_2 = H$
Wegen $\mathcal{N}H\neg G/G_2 \cap G^1/G_2 = 1$ ist $Hl_\pi G_1$, und alle weiteren $A\neg G_\nu m_\pi G_2$.
Aber $A \cap G_1' = H \notin l_\pi G_1'$ wegen $C := \mathcal{N}_{G_2}H\neg G_1^q/G_1$

(6) Man muß den Konjugiertheitssatz für sm$_\pi G$ und sn- erblich große π-Untergruppen einheitlich führen können.

Bem.: (7) Sei $\begin{cases}\varphi \in \text{ Hom } G\\ \text{Kern } \varphi \quad \pi'\text{-Gruppe}\end{cases}$ $, A \le l_\pi$. Dann $A \in l_\pi G \iff A^\varphi l_\pi G^\varphi$.

135/136

sn.erblich große π-Ugr etc.

Bem (8) Für Konjugiertheit von A und B genügt es nicht, wenn für die kritischen κ $A \cap G_\kappa l_\pi G_\kappa$, $B \cap G_\kappa = l_\pi G_\kappa$ und $A\neg G^\kappa = B\neg G^\kappa$ ist.

Satz (9) Sei $\{G_\nu\}_0^n$ SNR von G, $S := G_{n-1}$, $A\cap G_\nu$, $B \cap G_\nu \in \mathfrak{L}_\pi G_\nu$, $A \cap S = B \cap S$,
24.12.1979 SAS = SBS.
Dann (a) $A\neg G^\nu = B\neg G^\nu$, $1 \le r \le n$, (b) $A \underset{\langle A,B\rangle}{=} B$.
Bew mit 132, 3a und

Hilfss. (10) $A, B \le G$, S sn G, SAS = SBS $\Rightarrow A\neg U/T = B\neg U/T$ whenever
S sn $T \lhd U$ sn G
besser: 10* Bew (10): $(A \cap U)T = T(A\cap U)T = TAT \cap U = \ldots B$.
denn: $TAT = T\,\text{SAS}\,T = T\,\text{SBS}\,T = TBT$
Etwas schärfer: mit gleichem Beweis nur $S \to C$:

Hilfss. (10*) $A, B, C \le G$, $CAC = CBC \Rightarrow A\neg U/T = B\neg U/T$ wenn $C \le T \lhd U$

136/137

Kor. (11) $A, B \in \mathrm{ms}_X G$ oder beide sn-erblich l_π. Sei S sn G, $A \cap S = B \cap S$, SAS = SBS. Dann $A \underset{A \vee B}{=} B$.
Bew 9.

Bem: (12) $A, B \in \mathrm{sm}_{\mathfrak{X}} G$, $A \neg G^{\mathfrak{S}} / G_{\mathfrak{S}} = B \neg G^{\mathfrak{S}} / G_{\mathfrak{S}}$
$\Rightarrow A \underset{A \vee B}{=} B$

Satz (13) $A, B \leq G$, S sn G. SAS = SBS
$\Rightarrow A$ und B haben über ihrem Durchschnitt mit S dieselben Kompositionsfaktoren (mit Vfh gerechnet)

FRAGE sm_X (14) Verhalten von $\mathrm{sm}_X G$ bei Aut G?

FRAGE sm_X (15) $A, B \in \mathrm{sm}_X G$ mögen dieselben Projektionen in die „dicken Einköpfe“ von G haben. $A \underset{G}{=} B$?
Allgemeiner sollte man $A \neg F = B \neg F$ für „geeignete“ sn Ausschnitte F von G voraussetzen.

FRAGE (16) A, B sn erbl. groß, konormal $\Rightarrow AB$ auch?

FRAGE (17) $A, B \in \mathrm{sm}_X G$, gleiche Krit. Projekionen $\overset{?}{\Rightarrow}$ alle Proj. gleich?

137/138

π-Verträglichkeit

27.12.79 Def. (1) $A_1, \cdots A_n \leq G$ heißen π-verträglich, wenn sie π-Hallgruppen ihres Erzeugnisses E sind und E π separabel ist.

FRAGE (2) Welche $\mathfrak{A} \in S_\pi G$ (Subnormal-) Ausschnittkollektionen $\{F_1, \cdots, F_{\mathfrak{a}}\}$ von G. haben die Eigenschaft, daß aus $\mathfrak{A} \subseteq S_\pi G$, $A \neg F = B \neg F$ $\forall A, B \in \mathfrak{A}$, $\forall F \in \{F_1 \cdots, F_n\}$ folgt: $\mathfrak{A}$ ist π-verträglich?
z.B. die nichtabelschen Faktoren einer K-Reihe, wenn $\mathfrak{A} \subseteq$ sn-erblich große π-Gr.

138/139

Determinierende sn-Faktoren

Def. (1) $F = X/Y$ ist ein determ. SNF von G, kurz $F \in \mathcal{D}(G)$, wenn $Y \lhd X$ sn G, X/Y perfekt einfach. $Y = \mathcal{C}_G(F)_{\cdot\cdot G}$; d.h. wenn F zu keinem „höhergelegenem“ SNF von G projekttiv ist.
5.1.80 Schliersee

(2) $\eta \in$ Hom $G \Rightarrow \mathcal{D}(G^\eta) = \mathcal{D}(G)^\eta - \{1_{E/\text{ Kern } \eta}\}$

(3) $A \leq G$, $F = X/Y \in \mathcal{D}(G)$, M sn G, $X = MXY$
$\Rightarrow A_n := \mathcal{N}_A(M)$ läßt $A \neg F \neg M = (A \cap X)Y \cap M = AY \cap M$ fest.
Bew: AM läßt $\begin{cases} G \\ \mathcal{C}_G(M) \end{cases}$ fest, also auch $\mathcal{C}_G(M)_{\cdot\cdot G} = Y$, also auch AY, somit auch $AY \cap M$.

(4) Sei N ein perfekter halbeinfacher Normalteiler von G, $N = \bigtimes_\delta M_\delta$, und sei F^δ der zu M_δ gehörige determ. SNF von $G : Y_\delta = \mathcal{C}_G(M_\delta)_{\cdot\cdot G}$
Sei $A^\delta := A \neg F^\delta$, $B_{\delta^S} = A^\delta \neg M_\delta$. Dann

a) $B_\delta = AY_\delta \cap M_\delta$, und

b) A normalisiert $B := \bigtimes_\delta B_\delta \leq N$; $\mathcal{K}(B) = U\mathcal{K}(A \neg F_\delta)$

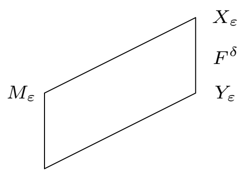
c) $A \cap N \leq B$

Bew: $a \in A \Rightarrow (B_\delta)^a = (AY_\delta \cap M_\delta)^a = AY_{\delta^a} \cap M_{\delta^a}$; A permutiert die B_δ.

? Bew c): $a \in A \cap N \Rightarrow a = \prod m_\delta \Rightarrow aM^*_\delta$

139/140

(6) Seien F_δ die determ. SNF von G. Seien $A^\delta \leq F^\delta$, $A_i \leq G, \forall\, i$: $A_i \neg F^\delta = A^\delta$; $A = \langle A_i \rangle$.
$B := \bigtimes (A^\varepsilon \neg M_\varepsilon)$, wo $N := \bigtimes M_\varepsilon$ ein halbeinfacher Normalfaktor von G ist



Dann

a) $\begin{cases} A \leq \mathcal{N}_G(B) \\ A \neg N \leq B \end{cases}$

b) Falls also $\langle A_i \rangle = G$ ist, ist B ein in N enthaltener Normalfaktor von G. Ist N Hauptfaktor von G, so $B = {N \atop 1}$. Wenn $B = N$, so $M_\delta \in \bigcup \mathcal{K}(A^\delta)$; $A_i \neg N$ ist ein subdirektes Prod der M_δ, und im Fall $B = 1$ ist $A^\delta = 1$, $\forall \delta$.

Bew:
a) $\mathcal{N}_A(M_\delta)$ läßt F_δ, A^δ, $A \neg M_\delta$ fest. A läßt B fest.
Die M_δ Komponente von $A \neg N$ liegt in $A^\varepsilon \neg M_\varepsilon$.

Anderer Beweis folgt aus (5) mittels

(7) $K \trianglelefteq G$, $X/Y \in \mathcal{D} := \mathcal{D}(G)$ (Def: (1)) $KX \neq KY$.
Dann ist

a) $K \leq Y$ und ${}^{X/K}/_{Y/K} \in \mathcal{D}(G/K)$.

b) Für jeden Hom φ von G mit Kern K ist $X^\varphi/Y^\varphi \in \mathcal{D}(G^\varphi)$ und für alle $A \le G$ ist

$$A^\varphi \neg X^\varphi/Y^\varphi = (A\neg X/Y)^\varphi$$

Satz (9) = [teilweise von S. 141 übernommen]

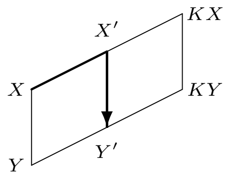
Kurz (7)-(8) a) Projektionen in die determ. SNF = D hom, sind verträglich mit allen Homom. von G. Bew. Nach 7-8
mit Hom φ von G, die D nicht annulieren, [und mit den übrigen sowieso, da dann $A^\varphi \neg X^\varphi/Y^\varphi = 1 = (A\neg X/Y)$]

b) Folge: $A\neg D = B\neg D \forall D \in \mathcal{D}(G) \Rightarrow A^\varphi \neg \overline{D} = B^\varphi \neg \overline{D}\ \forall \overline{D} \in D(G^\varphi)$

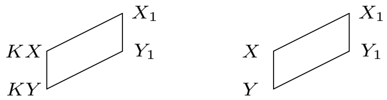
140/141

Bew:

a) $KX \ne KY$ $KX \not\le KY$ $X \le KY$; $Y \le X \cap KY \lhd X$
Da X/Y einfach, ist $X \cap KY = Y$; ferner $X.KY = KX$, also Parall:



Wäre $X < KX$, so $X \lhd X'$ $Y' := KY \cap X'$
$Y' \le \mathcal{C}(X/Y)$ $Y' = Y$ $X' = X$ Wid.
Also $X = KX$, $Y = KY$, $K \le Y$.
Wäre



Wid.
Also $K\eta_K/K\eta_K \in \mathcal{D}(G/K)$.

[gemeint ist wohl: $X\eta_K/Y\eta_K \in \mathcal{D}(G/K)$]

b) erster Teil folgt aus a), zweiter so:

$$A^\varphi \neg X^\varphi/Y^\varphi = {}^{AK}/_{K} \neg {}^{XK}/_{YK}$$

unter φ^{-1}

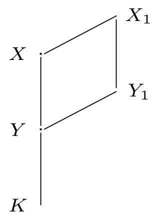
$$\begin{aligned} &= AK\neg X/Y \text{ wegen } K \le X, Y \\ &= (AK \cap X)Y \\ &= (A \cap X)KY \text{ wegen } X = XK \\ &= (A \cap X)Y \text{ wegen } Y = YK \end{aligned}$$

6.1.80

(8)

$$K \lhd G \Rightarrow \mathcal{D}(G/K) = \{X/K \Big/ Y/K \Big| \frac{X}{Y} \in \mathfrak{S}(G), K \nleq Y\}$$

Bew: "$\supseteq$" nach 7a
"$\subseteq$" Ist ${}^{X/K}\!\big/_{Y/K} \in \mathcal{D}(G/K)$, so folgt aus X_i sn G stets $Y = Y_1$, also ${}^{X}\!/_{Y} \in \mathcal{D}(G)$, $K \leq Y$.



[Der Rest auf dieser Seite gehört zu Satz 9 auf S. 140
und wird dort wiedergegeben.]

141/142

Sylow-Normalisator-Türme 95
sn - erblich große π Untergr. 132, 135
Supplemente 1-3, 20
Dedekind 18
Cartergr. 90
Trans. Perm Gr 4
Projektionen 5
$\lhd\lhd$ 5-6 39 113 125
$\mathcal{M}\mathfrak{X}G$ 7-17 (starker Sylow S.) sm$_{\mathfrak{X}}$ 128 $\overbrace{89\text{-}88}^{\mathcal{M}^{\lhd\lhd}}$ 90 $\overset{\text{Timmesfeld}}{81}$
π-Untergruppen 19
Normalisatorsätze 21 107 117
Gaschütz & Maschke 23-33
Unabhängigkeit & Faktorisierung 35-37
Cosubnormalität 89 111 115 u. Vertauschbarkeit 119
Kriterien für Subnormalität 41
$S \lhd\lhd AB$ 39 41-44 99-105
Subnormalisatoren 114
ℓsnℓ und Verwandtes 117
Verallg. von sn in endl. Gruppen 127

$A \wp B$ 120 $p^\alpha q^\beta$-Gruppen 123
Perm Gr Grad p 51-79 m. reg. Ugr: 54, 56
Distributive Funktoren
Winkelfeld 38 Matrizenbüschel mit pos. def. Herm M. 38
Determinierende Subnormalfaktoren von G 139-141

142/143

Struktur von sn G 127
Innere Automorphismen 93 f. Novosibirsk!