Prof. Dr. Helmut Wielandt

Tagebücher

D17

7.1.80 –

Supplemente, “Traktoren“.

7.1.80

Satz 1 = XVI 3(1) (Nachtrag zum 26.3.78)
Sei $H \leq G$, $HS_1 = HS_2 = G$, $H \cap S_i = D_i$, $D_1D_2 = H$. Dann ist auch $D := S_1 \cap S_2$ ein Supplement: $HD = G$.
Kurz: Der Durchschn. (zweier) unabh. Supplementschnitte ist auch einer.
Bew: $S_1D_2 = S_1D_1D_2 = S_1H = G$; ebenso $S_2D_1 = G$.
$HD = D_1D_2D = D_1D_2(S_1 \cap S_2) = D_1(D_2S_1 \cap S_2) = D_1S_2 = G$.

Zus. 1′ $S_1S_2 = G$ genügt nicht: $|G| = p^2$, $|H| = p$.

Betr. Cartergruppe & „Traktoren“:

2. Ein Sylow-Normalisator-Turm einer auflösbaren Gruppe G braucht keine Carter-Untergruppe von G zu enthalten; z.B.: S_4, $\pi = (2, 3, 5)$.
3. Über “kleinste auf G abgebildete Gruppen:
Bechtell PAMS 64, 25 – 29

Kompositionsklassen $\mathfrak{C}$, $m_{\mathfrak{C}}$ Schliersee 7.1.80

Sei $\mathfrak{C}$ abg. gegen $\trianglelefteq$, Hom, Erweiterung

$$m_{\mathfrak{C}}G := \{A \in s_{\mathfrak{C}} : A \leq B \in s_{\mathfrak{C}}G\}$$

1 Verhalten bei Homomorphismen: $N :=$ Kern φ

a) $K(N) \subseteq \mathfrak{C} \cup s_{\pi'} \Rightarrow \pi(\mathfrak{C}) =: \pi$

$$(m_{\mathfrak{C}}G)^{\varphi} = m_{\mathfrak{C}}(G^{\varphi})$$

b) $K(N) \cap \mathfrak{C} = \emptyset \Rightarrow (m_{\mathfrak{C}}G)^{\varphi} \subseteq m_{\mathfrak{C}}(G^{\varphi})$

Bew:

a) I. $N \in \mathfrak{C}$ klar.
II. $N \in s_{\pi'}$ Feit-Th.

b) Beispiel: $G = \mathrm{SL}(2,5)$ hat $1 \underset{2}{<} Z \underset{60}{\lhd} G$

$$\mathfrak{C} := \{C_3,\ \text{Alt } 5\} \quad |A| = 3, \quad A \leq G$$

Dann $A \in m_{\mathfrak{C}}G$, aber für $N = Z$
$A^{\varphi} \notin m_{\mathfrak{C}}G^{\varphi}$, da $A^{\varphi} < G^{\varphi} \in \mathfrak{C}$.

2 Die Projektionen von $\mathfrak{C}$ - Faktoren C in Subnormalfaktor S von G sind ($\cong$ SNF von , also) $\mathfrak{C}$ - Faktoren von G. (In einen beliebigen Faktor F von G klappt's nur, wenn $\mathfrak{C}$ auch abgeschlossen gegen $\leq$.)

2/3

Kompositionsklassen, für die der $\mathfrak{L}_\pi$-Satz für $m_\mathfrak{C}$ gilt:

7.1.80 $\qquad \pi := \pi(\mathfrak{C})$

Sei $\mathfrak{C}$ eine gegen $\triangleleft$ abgeschlossene Klasse von Gr. Aus $A \in m_\mathfrak{C}G$ und $N \trianglelefteq G$ folge $A \cap N \in \mathfrak{L}_\pi N$. Dann gilt:

(1) $p \in \pi \Rightarrow C_p \in \mathfrak{C}$.
Bew: $p \in \pi \Rightarrow \pi \neq \emptyset \Rightarrow \mathfrak{C} \neq \emptyset \Rightarrow 1 \in \mathfrak{C}$. Aus $C_p \notin \mathfrak{C}$ folgt $1 \in m_\mathfrak{C}(C_p)$, also $1 \in \mathfrak{L}_\pi(C_p), p \notin \pi$, Wid.
Allgemeiner:

(2) Aus $X \triangleleft Y \underset{n}{\leq} A \in \mathfrak{C}$, $X_A = 1$, $B := Y/X$, B einfach folgt: $\exists B_1 \in \mathfrak{C}$, $1 < B_1 \trianglelefteq B$. siehe 4(3) Bew
Bew: ohne Benutzung von (1). Besser indirekt: Ann. $B \notin \mathfrak{C}, \ldots$

Sei μ die Mon Darst. von A vom Grad n vermöge $\mathfrak{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \\ \vdots \end{pmatrix}$ mit Koeff. aus B. Wegen $X_A = 1$ ist $\mu(A) \cong A$. Sei

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} b_1 & & & 0 \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & b_n \end{pmatrix} : b_\nu \in B \right\}, \quad G := DA_i \trianglerighteq D.$$

Wäre $\mu(A) \in m_\mathfrak{C}G$, so $1 = \mu(A) \cap D \in \mathfrak{L}_\pi D$, aber $D \in S_\pi$, Wid.. Also wenn $A^* \geq \mu(A)$, $A^* \in m_\mathfrak{C}G$, so ist $1 < A^* \cap D \triangleleft A^*$. Wähle $D^* \cdot\!\!\triangleleft A^*$, $D^* \leq A^* \cap D$.
Da die erste Komponente B von

$$\mu(B) = \begin{pmatrix} B & \\ & \ddots \end{pmatrix}$$

einfach ist und die erste Komp. von D^* normalisiert, ist letztere

$= \begin{cases} 1 \Rightarrow D^* = 1 \\ B \end{cases}$ wegen Transit. von $\mu(A)$. Wid. G

3/4

Also hat D^* einen Homom. auf (die erste Komp.) B, und da $D^* = \prod$ isom einf Gr X_i, sind alle $X_i \cong B$, $X_i \triangleleft D^* \triangleleft A^* \in \mathfrak{C}$, $B \in \mathfrak{C}$.
Folge

(3) Satz über $m_{\mathfrak{C}} \Rightarrow \mathfrak{E}_\pi =$ erblich $\mathfrak{L}_\pi$

Die einzigen Kompositionsklassen $\mathfrak{C}$, für welche möglicherweise der $\mathfrak{L}_{\pi(\mathfrak{C})}$-Satz für $m_{\mathfrak{C}}$ gilt, sind die „Sylowklassen", die auch bzgl. $\leq$ abgeschlossen sind

Literatur Sylowsätze:

(4) Lit. W. Plesken, Ein Sylowsatz für $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$
Vortragsauszug Oberwolfach Jan. 1978 (Separat)

Z. Arad & D. Chillag, Finite groups containing a nilpotent Hall subgroup of even order. Technion Preprint MT 427, 1979
dort: $H \leq G \in E_\pi^n \not\Rightarrow H \in E_\pi^n$ $(\mathrm{PSL}(2,3), \pi = \{3,5\})$

(5) FRAGE a) Ist jede große π-Untergruppe submaximal? (5) FRAGE

b) nützt folgende Def etwas?
A sehr groß sn $G \iff \nexists B : A < B < G$ mit $A^\sigma = A \Rightarrow B^\sigma = B \quad \forall \sigma \in$ Aut G.

4/5

(4) Sei $\mathfrak{C}$ eine gegen $\trianglelefteq$ abgeschlossene Klasse von Gr. Es gebe $A \in \mathfrak{C}$ einfach, $B := Y/X = B_1 \times B_2$, $X \lhd Y \leq A$, B_i einfach, $B_1 \cong B_2 \notin \mathfrak{C}$. Dann gibt es

$$G, D, A_1 A_2 : D \trianglelefteq G, G/D \cong A \cong A_1 \cong A_2, A_i \in m_{\mathfrak{C}} G$$

$A_1 \cap D = A_2 \cap D = 1$ (sodaß A_1, A_2 dieselben Projekionen in die Faktoren von $G \rhd D \rhd 1$ haben), wobei aber $A_1 \underset{G}{\neq} A_2$ ist.

Bew: G wie in Bew. (3), $A_1 = \mu(A)$, $A_2 = A_1^\sigma$, wo σ den Automorphismus von G bezeichnet der B_1 mit B_2 vertauscht (Koeff.-weise auf die Matrizen $\mu(a)$ angewandt). Annahme: $B \notin \mathfrak{C}$. Dann ist $\mu(A) := A_1 \in m_{\mathfrak{C}} G$ (sonst nach Beweis (3): $B \in \mathfrak{C}$), ebenso $A_2 = A_1^\sigma \in m_{\mathfrak{C}} G$. Ferner $A_1 \cap D = 1 = A_2 \cap D$. Wäre $A_1 \underset{\mathfrak{A}}{=} A_2$, so gäbe es wegen $G = A_1 D$ ein $d \in D$ mit $d^- A_1 d = A_2$. Die 1. Komponente d_1 transformiert die erste Komp. von $\mu(B)$ in die von $\mu(B)^\sigma$. Da sowohl die Transformation mit d als auch Anwendung von σ $(a_1^d = Da_1 \cap A_2 = a_1^\sigma)$ jedes El't von G in seiner

5/6

Nebenklasse Dg läßt, ist $\mu(a)^d = \mu(a)^\sigma$, also induziert d_1 auf B den Automorphismus $(b, b') \mapsto (b', b)$, wie σ. Aber

$$(b,1)^d = (b^d, 1), \quad (b,1)^\sigma = (1,b),$$

also $b^d = 1 \quad \forall b$. Wid.
Folge von (4):

Satz (5) Die einzigen Kompositionsklassen, für welche der Konjugiertheitssatz

$$\left.\begin{array}{r} A_1, A_2 \in m_{\mathfrak{C}}G \\ A_1 \neg G^{\lambda} = A_1 \neg G^{\lambda} G \end{array}\right\} \Rightarrow A_1 \underset{G}{=} A_2$$

gilt (möglicherweise), sind die Sylowklassen.

Erweit.-Frage (6) Sind zwei submaximale π-Untergr. von G konjugiert, wenn sie gleiche Projekt. in die Quotienten einer Untergr.-Kette $G = G_0 > G_1 > G_2 > \cdots > G_n$ haben?

Projektionen in Quotienten Bem: Ist $Q_i = G_i : G_{i-1}$, so ist $|A \neg Q_i| i.a.$ kein Teiler von $|Q_i|$, z.B. $S_n : S_{n-1}$. Genau wenn A sn G, gilt das aber für alle Quotienten in G (S. 19).

6/7

$\mathcal{S}n_G^{II}$; Subnormalität in AB

6.2.80 Sei $G = AB$ endlich

FRAGEN: (1) $A \subseteq \mathcal{S}n^{II}B$, $B \subseteq \mathcal{S}n^{II}A \Rightarrow A$ csn B ?

(2) $A \subseteq \mathcal{S}n^{II}B \Rightarrow B$ sn AB ?

allg: (3) $X \leq AB$, $A \cup B \subseteq \mathcal{S}n^{II}(X) \Rightarrow X$ sn AB ?

(4) $X \leq G$, $A \cup B \subseteq \mathcal{S}n^{II}(X) \Rightarrow AB \subseteq \mathcal{S}n^{II}X$?

Hilfss. 6 $A, X \leq G$; $\forall a$ X sn $\langle X, X^a\rangle \Rightarrow X^{\mathfrak{N}}$ sn $\langle A, X\rangle$
Bew: Die X^a sind paarw. kosubnormal [93]: $X^{\mathfrak{N}}$ sn $X^A \lhd \langle A, X\rangle$

13.2.80 Satz 7 $X \leq G = AB$ endl., X sn $\langle X, X^{\substack{a \\ b}}\rangle$ $\forall a, b$
$\Rightarrow X^{\mathfrak{N}}$ sn G.
Bew: $G = \langle A, X\rangle \cdot \langle B, X\rangle, X^{\mathfrak{N}}$ sn $\substack{\langle A,X\rangle \\ \langle B,X\rangle}$ (6)

Frage 8 Seien A, B p-Untergruppen, $A \subseteq \text{subnor}_G B$. Folgt $B \leq \text{subnor}_G A$ für diese oder jene Def. von subnor A? Nicht für $\{g \in G | A \text{ sn } \langle A, A^g\rangle\}$

7/8

X sn ABA

1. Aufgabe: Kriterium für X sn ABA.

2. Bemerkg: $A \leq G_1 \leq ABA \Rightarrow G_1 = AB_1A$ mit $B_1 = B \cap G_1$

3. Aufgabe: X sn A, X sn B, $G = ABA \overset{?}{\Rightarrow} X$ sn ABA

8/9

Struktur von $G_1G_2 = G$ Sylow-Norm Türme

20 3 80 (1) Sei $P_i \in p$-Syl G_i. Dann folgt aus $g, h \in G$, $\langle P_1^g, P_2^h\rangle \in \mathfrak{G}_p$ stets $P_1^g \wp P_2^h$.

(1′) Aus $\langle P_1, P_2\rangle = P \in \mathfrak{G}_p$ folgt $P_1^g \wp P_2$ wenn $P_1^g \subseteq P$.

FRAGE (2) Enthält das Erzeugnis zweier $\wp$-Sylow-Normalisatortürme von G_1, G_2 einen von G?

FRAGE: (3) Maximale π-Untergruppen von G_1G_2.

Nachtrag 28.5.81

9/10

$\wp$, $\lhd\lhd$ und $M \lessdot G$

23.3.80

FRAGE (1) Sei A sn in zwei maximalen Untergruppen M, L von G, die einen Maximal-Durchschnitt besitzen:
$D = M \cap L \neq M$ und $D \leq K \lessdot G \Rightarrow K \cap M \in \{M, D\}$, $K \cap L \in \{L, D\}$.
Ist dann A sn G?

(2) Genügt es bei Bartels, wenn die Erzeugenden von A ein ganzes Vertretersystem von $G : A$ anziehen?

Fortsetzung von XVI 116:

(3) "Sylowtürme in vertauschbar erzeugten Gruppen" oder „abgeleitet" ?

(4) Ist $A \leq G$, $\pi = \pi(A) \notin \mathbb{P}$, so folgt aus $\pi\langle A, A^g\rangle = \pi$ f. alle $g \in G$ N I C H T $\pi(A^G) = \pi$.
Bsp: $G = S_5 \times C_3$, $A = C_2 \times C_3$.

10/11

Fragen betr. Krit. f. $\lhd\lhd$

(1) Sei $g \in G$ fest, $A \leq G$. Gilt

$$\forall a \quad A \text{ sn } \langle A, A^{a^g}\rangle \Rightarrow A \text{ sn } \langle A, A^g\rangle?$$

(2) Folgt aus $A(\circ b)^\infty \subseteq A\ \forall b$, $B(\circ a)^\infty \subseteq B\ \forall a$ stets A csn B?

(3) Aus $\langle A, B\rangle = G$ und $[a, b] \in A \cap B\ \forall a, b$ folgt: A, B konormal. Verallg auf kosubn.?

11/12

Normale Supplemente

Sei $N \lhd H \leq G$, $\mathcal{M}_R$ die mon. Darst. mit Vertr.- Syst R

1. Falsch ist die Vermutung: Wenn in $\mathcal{M}_R(g)$ je zwei Diagonalelemente konjugiert sind, dann gibt es $M \trianglelefteq G = HM$, $H \cap M = N$.
   Bsp. $G = S_5$, $H = S_{(1,2,3)}$, $N = 1$, R beliebig.

Falsche 2. Vermutung: Wenn in jedem $\mathcal{M}_R(g)$, $g \in G$, alle Diagonalelemente gleich sind, kann man H/N im obigen Sinn abschneiden.
Gegenbeispiel: G einfach, $|H| = 2$.

Vermutg. 3. Vielleicht genügt die Zusatz-Vor. $Z(H) = 1$?

Satz 4. Sei $\{Hr \big| r \in R\} > \frac{2}{3}|G : H|$ und $R \leq G$. Dann wird $\langle R^G \rangle \cap H$ erzeugt von den H-Konjugierten derjenigen h, die bei der Zerlegg. der ${r'}^{h'} = hr$ auftreten ($r' \in R, h' \in H$); $h \in H$, $r \in R$.

5 §-Überschrift: Fast 2-trans P Gruppen

12/13

Normale Supplemente

Vermut. 1 $G = HR$, $Z(H) = 1 = H \cap R$; $H, R \leq G \Rightarrow \exists N =$ norm Kplt von H in G

Frage 2 Genügt es ein Erzeugendensystem von H zu betr.?

3 In der monomialen Darst. von G über H/N habe alles mit ≥ 3 Diag-El'ten diese $= 1$. $\Rightarrow$?

4 In primitiven G gibt es zu jedem $1 < N_0 \trianglelefteq G_0$ höchstens ein $N \lhd G$ mit $N \cap G_0 = N_0$. Was hilft Quasiprimitivität?
Es gibt dann auch nur eine Fortsetzung eines Epimorphismus von G_0 auf G.
Ausdehnen auf $H \lessdot H_1 \lessdot \cdots \lessdot H_n = G$!

13/14

$\wp$ und sn. Vertauschbare Erzeugung

19.4.80 1. Aus $A = A'$ einfach; $A, X \leq G$; $A \wp A^x$ $\forall x \in X$ folgt nicht A sn A^X.
Beispiel: $A = A_5$, $G = A_6 \cdot \langle x \rangle$ mit einem äußeren Autom. x von A_6; $X = \langle x \rangle, |X| = 2$.
Es ist A^x tra $\{1, 2, \cdots, 6\}$, da $\ni C_5$, kein Fixpkt. Also $AA^x = A_6 = A^X$; $A \notin$ sn A^X.

Frage 2 Folgt aus $A \leq HK$ endlich, $\langle A, A^x \rangle$ vertauschbar erzeugt für $\forall x \in H \cup K$ stets A sn HK?

3 Sei $A_i \wp A_k$ $(\forall i, k)$ und X sn X^{A_i} $(\forall i)$.
Folgt aus $X \leq \prod A_i$ stets X sn $\prod A_i$?

14/15

Koinzidenzkerne

Def 1 Sei $\Phi = \mathrm{Hom}(G, H)$. Setze $\mathcal{K}_\Phi := \{g \in G \big| \varphi g = \psi g \ \forall \ {}^{\varphi}_{\psi} \in \Phi\}$

Bsp 2 $\mathcal{K}_{\{\varphi,0\}} = \ker \varphi$ wenn $\varphi \in$ Hom G

a) Also jeder Normalteiler ist ein KK von G

b) $A \leq$ Aut $G \Rightarrow \mathcal{C}_G(A) \in KK(G)$.

c) Der Durchschnitt von KK nen zum selben H ist auch einer.

d) Ist $\alpha \in \mathrm{Epi}(X, G)$, so ist das inverse Urbild jedes KKs von G auch einer.

15/16

3-dim. Wertevorrat

FRAGE: 1 Wie hängt der WV von AB mit dem von A, B zusammen ? Gibt es eine
5.5.80 Multiplikation bei der, wenn man sie in der Einheitskugel deutet (unter Auszeichnung des Nullpkts)?

16/17

$\wp$ und $\lhd\lhd$

1 Maier Preprint 1978: $A \wp M$ $\forall M \lessdot G \Rightarrow$ Fitt A sn G
Frage: Was wenn $A = A'$ einfach?
Brief Maier 10.7.80 (bei **???**) $A = A'$ perfekt genügt nicht

17/18

$m_{\mathfrak{X}}$ und Verwandtes

(1) Wenn G eine zyklische π-Hallgr. hat, so braucht $A \leq G$ überhaupt keine π-Hall-Gr. zu haben. $G = \mathrm{PSL}(2, 31)$, $\pi = \{3, 5\}$, $A \cong A_5$
[Steht bei 2. z. Arad u. D. Chillag, Finite gps containing a nilpotent Hall Sgp of even order Technicon Preprint April 1979]. Hartley gemeldet 4.5.80

(2) Wenn G außer abelschen KFG nur A_5 (und A_6?) als KFG hat, so sind je zwei auflösbare π-Untergruppen maximaler Ord. konjugiert in ihrem Erzeugnis.

18/19

Arithm. Krit. f. $\lhd\lhd$

1.8.80 Def. $A\tau G :\iff$ aus $V \le U \le G$ folgt

$$|A \cap U : A \cap V| \text{ teilt } |U : V|.$$

Satz G endlich. Dann A sn $G \iff A\tau G$.
Das folgt aus Kegels Satz 8ii (1965)
Direkter Beweis:

(1) $B \trianglelefteq A\tau G \Rightarrow B\tau G$

(2) S sn $G \Rightarrow S\tau G$

(3) $A\tau G$, $G' \le G$, $A' = A \cap G' \Rightarrow A'\tau G'$

(4) $A\tau G$, $\varphi \in$ Hom $G \Rightarrow \varphi(A)\tau\varphi(G)$
Bew: $K = \ker\varphi$, $\overline{X} := \varphi(x)$

$$K \le V \le U \le G \Rightarrow |KA \cap U : KA \cap V| = \frac{|A \cap U : A \cap V|}{|A \cap U \cap K : A \cap V \cap K|}$$

$$\text{teilt } |A \cap U : A \cap V| \Big| |U : V|$$

(5) Bewschluß: τ Vererbungstyp II III IV.
Aus $A\tau G$; $\exists_1\ M : A \le M \lessdot G$; A sn M; $|A| = p \nmid |G : M|$ folgt:
$\exists\ g \in G - M$; $A \not\le M^g$
$p = |A \cap G : A \cap M^g|$ teilt $|G : M^g| = |G : M|$. Wid.
[Von S. 18 der Reihenfolge entsprechend übertragen:]

(6) Def: $A\,\kappa\,G :\iff S \in \text{Syl } G \Rightarrow S \cap A \in \text{Syl } A$. Damit gilt

$$A\,\kappa\,G \iff \text{ aus } U \le G \text{ folgt } |A : A \cap U| \Big| |G : U|.$$

19/20

Krit. f. A csn B

Fr. (1) Genügt es für A csn B, wenn es zu jedem p ein Paar kosubnormaler Sylowgr. A_p, B_p gibt?
Nein: $B = G$.

(2) Genügt es, wenn zu jeder p-Sylowgruppe von A eine kosubnormale von B existiert, und umgekehrt? Das wäre eine Verschärfung der Vermutung von Kegel.

Allgemeiner:

(3) Genügt es für A sn $\langle A, B\rangle$, wenn zu jeder p-Sylowgruppe von B eine kosubnormale in A existiert?

(3′) Genügt es für A sn $\langle A, B\rangle$, wenn A sn $\langle A, A^b\rangle$ für jedes primäre $b \in B$? Nein: # 95 S. 310 (b)

20/21

$$M_{\mathfrak{X}}G;\ G \rhd G_1 \rhd \cdots \rhd G_n,\ G_\nu \trianglelefteq G$$

4.8.80 1. Sei $C_p \in \mathfrak{X}\ \forall p \in \mathbb{P}$. Dann ist die Klassenzahl $c_{\mathfrak{X}}G = 1 \iff G \in \mathfrak{X}$.
Folge: Sind G^ν die Kompfakt. von G, so ist

Vor. 1

Satz 2. $c_{\mathfrak{X}}G = 1,\ G \in \mathfrak{X} \iff c_{\mathfrak{X}}G^\nu = 1 \quad (\nu = 1 \dots n)$

3. $\mathfrak{X}$ beliebig $\mu_{\mathfrak{X}}G =$ Klassenzahl $|(\mathcal{M}_{\mathfrak{X}}G) : G|$
$\sigma_{\mathfrak{X}}G =$ Klassenzahl $|\mathrm{submax}_{\mathfrak{X}}G : G|$
Dann

$$\mu_{\mathfrak{X}}G \leq \mu_{\mathfrak{X}}G^1 \cdot \prod_2^n \sigma_{\mathfrak{X}}G^\nu$$

Bew: Induktion mit G/G_{n-1}; genügt für $n = 2$.

4. Vor 1. Dann $A \in$ submaximal$_{\mathfrak{X}}G \Rightarrow A = \mathcal{N}_G A$.

5. Ähnlich für $|\mathcal{M}_{\mathfrak{X}}G :$ Aut $G| =: c^*_{\mathfrak{X}}G$.

6. Für die “verallgem. Hall gr“ $\mathfrak{S}G^n$ (= sn erbl groß) gilt

$$\mathfrak{S}(G_1 \times G_2) = \mathfrak{S}(G_1) \times \mathfrak{S}(G_2).$$

21/22

(7) $A \in \mathcal{M}_{\mathfrak{X}}G$, S sn H, $A \leq H \leq G \Rightarrow A \cap S \in \mathfrak{L}_\pi S$ wo $\pi := \pi(\mathfrak{X})$.

(8) Ist $A < G$ eine max. $\mathfrak{X}$-Ugr eines jeden H mit $A \leq H < G$, so ist

$$\left\langle \begin{array}{l} A \in \mathcal{M}_{\mathfrak{X}}G \text{ oder} \\ A \lessdot G \in \mathfrak{X}. \end{array} \right.$$

(9) Sei $A \leq G$, $N \lhd\!\cdot\, G$. Dann (vgl. 6) $A \in \mathfrak{S}G \iff A\,\pi$-norm-gleich, $A \cap N \in \mathfrak{S}N$.

(10) Was ist das einfachste Beispiel einer normalisatorgleichen Gruppe $A < G$, die für kein $\mathfrak{X}$ submaximal ist?

(11) Wo braucht man Abgeschlossenheit von $\mathfrak{X}$ gegen Homomorphismen? (bei innerer G-Theorie?)

22/23

6.8.80 Sei $\pi = \pi_n = (p_1, \ldots, p_n)$, G endlich, $\pi_\nu := \{p_1, \cdots, p_\nu\}$

Forts. v. XV 155 T π SNT $G :\Longleftrightarrow \exists\ 1 = T_0 \lhd T_1 \lhd \cdots \lhd T_n = T$ mit ($T_1 \in p_1$-Syl Gr,)
$T_\nu / T_{\nu-1} \in p_\nu\text{-Syl}\ {}^{\mathcal{N}_G T_{\nu-1}}\!/_{T_{\nu-1}}$
NB: Die T_ν sind durch T eindeutig bestimmt.

Dipl.-Arbeit (1) π-Kompos.-Turm-Gruppen Eberhard Junginger 1976-78?

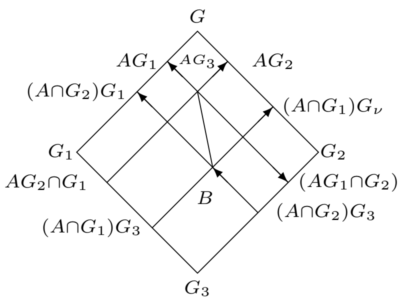
Gegenbsp. (2) $G' \trianglelefteq G$, $T\pi$ SNT $G \not\Rightarrow T' := T \cap G'\pi$ SNT G'
Beispiel: $G = S_4$, $N = A_4$, $\pi = (2,3)$, $|P_2| = 8$, $P_2 \in \mathcal{T}_\pi(S_4)$ [sonst $P_2 \underset{3}{\lhd} T \in \mathcal{T}_\pi(G)$, $|T| = 24$, $T = S_4$, $|S_4 : S_4'| \equiv 0 \mod 2,3$, $|S_4'|\,\big|\,4$ aber $(123) \in S_4'$.]
Aber $P_2 \cap A_4 =$ Vierergruppe $\notin \mathcal{T}_\pi(A_4)$

(3) S. auch 1_2

23/24

Projektionen

(1)



$G_i \trianglelefteq G = G_1 G_2$
$B := (A \cap G_1) G_3 (A \cap G_2)$

$$\frac{AG_2 \cap G_1}{(A \cap G_1)G_3} \cong \frac{AG_3}{B} \cong \frac{AG_1 \cap G_2}{(A \cap G_2)G_3}$$

muß bei Remak stehen

$$\frac{A}{B} \cong \frac{AG_2}{(A \cap G_1)G_2} \cong \frac{AG_2 \cap G_1}{(A \cap G_1)G_3}$$

(2) Wenn $\mathfrak{X}$ jedes C_p ($p \in \mathbb{P}$) enthält, so ist jedes $A \in \mathcal{M}_{\mathfrak{X}} G$ durch obige Projektionen in eine SNR von G eindeutig bestimmt.
Bew: allgemeiner: (3) $\big|$ (2').. und $G = \bigcup\limits_{X \in \mathcal{M}_{\mathfrak{X}} G} X$.

(2'') z.B. $\mathcal{M}_{\mathfrak{S}}G$.

(3) Sei $\{G_\nu\}_0^n$ SNR von G, $A \leq G$, $A \cap G_\nu$ normalisatorgleich in G_ν. Dann A eind. bestimmt durch die $A \neg G^\nu$.

24/25

(4) $G = G_0 \rhd G_1 > 1$, $A_\nu := A \neg G^\nu = B \neg G^\nu$ $(\nu = 1, 2)$

$$\Rightarrow |A| = |B|, \ |\langle A, B\rangle : A| = |\langle A, B\rangle : B| \text{ teilt } |\mathcal{N}_{G_1} A_1 : A_1|.$$

genauer

$$'' \quad = |\mathcal{N}_{\langle A,B\rangle \cap G_1}(A_1) : A_1|.$$

Nachtrag 13.7.78 (5) Alle $C_p = \mathfrak{C} =$ Sylowklasse $\Rightarrow$
$A, B \in m_{\mathfrak{C}}G$, $A^\lambda = B^\lambda$ für die nicht aufl. G^λ

$$\Rightarrow A = B$$

Nachtrag 14.8.82 (6) Nach BREUNINGERs Zul.-Arbeit gilt für die minimal-einfachen Gruppen E:

$$2 \notin \pi, A \in \mathfrak{L}_\pi E \Rightarrow A \text{ intrav. in } E$$

25/26

$\mathfrak{S}_\pi G =$ "verallg. Hallgr.": Chunikhin

Def (1) $A \in \mathfrak{S}_\pi G \Rightarrow A \cap S \in \mathfrak{L}_\pi S$, $\forall S \in$ sn G.
oder $\forall S \in$ sn H, wenn $A \leq H \leq G$? 1.(3)
$v_\pi G := |\mathfrak{S}_\pi G : G|$

(2) $\mathfrak{S}_\pi G_1 \times G_2 = \mathfrak{S}_\pi G_1 \times \mathfrak{S}_\pi G_2$.
ebenso v_π.

(3) $A \in \mathcal{M}_\pi G \Rightarrow A \leq H \leq G$, S sn $H \Rightarrow$

$$A \cap H \in \mathfrak{L}_\pi H$$

Vielleicht wäre die rechte Seite eine gute Verallgemeinerung der Def der Hallgruppen?

Verallg. von $\mathcal{M}_\pi$: verlangt wird dabei $T \leq G$, T sn $\langle A, T\rangle \Rightarrow A \cap T \ l_\pi T$

(4) Zum "Hauptsatz von Chunikhin": Sei $\{G_\nu\}$ eine $\mathcal{N}R$ von G, C_ν sei eine Klasse konjugierter $\mathfrak{L}_\pi$-Ugr'en von G^ν, die unter G invariant ist. Dann ist $\mathfrak{A} := \{A \leq G | A \neg G^\nu \in C_\nu\} \subseteq \mathfrak{L}_\pi G$ eine Konjugierten-Klasse unter G; sind die $G_\nu \trianglelefteq G$, so $\mathfrak{A} \leq$ Intravar. (G).
Bew: leicht, Induktion mit G/G_{n-1}.

26/27

Intravarianz u. S-Ringe

9.2.81

(1) Im Gruppenring $R[G]$ bilden die El'te, die bei einem Autom. $\alpha \in$ Aut G fest bleiben, einen S-Ring, der symbolische Potenzierung $g \mapsto g^n$ mit jedem Exponenten $n \in \mathbb{N}$ gestattet.

(2) Ein maximales intravariantes Teilsystem von $R[G]$ ist ein S-Ring, der jede symbol. Potenzierung $g \mapsto g^n$ gestattet. Bew (1)

(3) $G = G_1 \times \cdots \times G_n$, G_ν char $G \Rightarrow$ Intr $G = \bigtimes$ Intr G_ν

27/28

Normalstruktur faktorisiert. Gr.

Nach T.M. Gagen, Tagsbez. OW 1/79, besitzt AB für auflösbares A und zyklisches B nur C_p, $L_2(q)$ oder $L_3(3)$ als Komp. Fakt. (genauer: AB involves only solvable groups, $L_2(q)$ or $L_3(3)$).

28/29

$A \geq 0$, maximal-EWe

9.2.81

Satz 1 Seien $A, B \geq 0$ $n \times n$-Matrizen mit Max-Ewen α, β. Sei

$$\left.\begin{array}{rcl} RB & = & BR \\ \text{oder} & & \\ RA & = & AR \end{array}\right\}, R \geq 0,$$

und für $E = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ sei $\lambda'' ER \leq R \leq \lambda' ER$.

Wenn R keine Nullspalte hat*, gilt:

Aus

$$\mu' E \leq B - A \leq \mu'' E, -\infty < \mu' \leq \mu'' < \infty$$

folgt

$$\frac{\mu'}{\lambda'} \leq \beta - \alpha \leq \frac{\mu''}{\lambda''} \quad [\text{ letzteres wenn } \lambda'' > 0]$$

* Besser (2) + (3)!

Gebraucht wird nur: $\exists x \in r$ PVA so daß $Rx \neq 0$.

Bei Marcus-Minc wird das (bestenfalls) unter der zusätzlichen Vor. bewiesen, daß A und B irreduzibel sind und $\mu' \geq 0$ ist, also $B \geq A$.

Bew: oBdA $RA = AR$, sonst $A \leftrightarrow B$.

$\exists\, x \in r$PVA, $y \in l$PVB; $\quad x, y \underset{\cdot}{\overset{\text{d.h. } \geq 0, \neq 0}{\downarrow\!>}} 0 \quad \Rightarrow z := Rx \underset{\cdot}{>} 0$

$$\begin{aligned} Bz &\leqq (A + \mu'' E)Rx = ARx + \mu'' ERx \\ &\leq RAX + \frac{\mu''}{\lambda''} Rx = \alpha Rx + \frac{\mu''}{\lambda''} Rx \\ &\leq (\alpha + \frac{\mu''}{\lambda''})z. \end{aligned}$$

Wenn $B > 0$, so ist $y > 0$, daher $\beta \leq \alpha + \frac{\mu''}{\lambda''}$;
Wenn $B \not> 0$, ersetze $B \mapsto B + \varepsilon E$, $\mu' \mapsto \mu' + \varepsilon$, $\mu'' \mapsto \mu'' + \varepsilon$.
Ebenso wird die linke Ungl. der Beh. bewiesen.

29/30

$A \geq 0$

(2) Seien $A, B \geq 0$, Max EW α, β.
Sei $Ax = \alpha x$, $x > 0$, $B - A = D$, $DX \leq \delta x$.
Dann ist $\beta - \alpha \leq \delta$
Bew: $yBx \leq yAx + yDx \leq (\alpha + \delta)yx$; $yx > 0$ da $x > 0$

(3) Ist $RA = AR$ und $DR \leq \delta R$, so ist für $x \in r$PVA mit $Rx \geq 0$ auch $z := Rx \in r$PVA und dazu $Dz \leq \delta z$, wie in (2) verlangt.

(4) Der "Satz von Fréchet", Marcus-Minc 3.41 von S. 160, sagt: Ist A zeilenstochastisch und $\omega = \min a_{ii}$ und λ EW von A, so $|\lambda - \omega| \leq$
(Der Beweis ist umständlich.)
Das ist trivial, sogar allgemeiner:

Satz 4 Ist $A \geq 0$, $\min a_{ii} = \omega$, $\lambda \in$ Spec A, so $|\lambda - \omega| \leq \alpha - \omega$ wo α der Max EW.
Bew: $A - \omega I \geq 0$ hat max EW $\alpha - \omega$.

30/31

$A > 0$

9.2.81

(5) Störung des Max EWs von $A \geq 0$. Sei $B \geq 0$
Ist

$$|B - A| \leq \delta A, \text{ so ist}$$
$$|\beta - \alpha| \leq \delta\alpha$$

Für $A > 0$ gibt es zu jeder hinreichend benachbarten Matrix B ein solches $\delta :\Rightarrow$ (6)
Für $A \geq 0$. $B - A \leq \delta E$ siehe (1), (2)+(3)

(6) $A > 0$, alle $a_{ik} \geq \rho > 0$, $B \geq 0$, alle $|b_{ik} - a_{ik}| \leq \delta$
$\Rightarrow |\beta - \alpha| \leq \alpha \cdot (1 + \frac{\delta}{\rho})$
Bew. (5): $|B - A| \leq \frac{\delta}{\rho}|A|$

(7) Auch bei beliebigem $A \in C^{n \times n}$ sollte man vielleicht die Störung von A als

$$|A - B| \leq \varepsilon |A|$$

voraussetzen

31/32

[Seite 32 ist leer!
Seite 33 fehlt!
Seite 34 fehlt!]

32/35

ℓsnℓ G

13.7.81 1. ℓsnℓ G kann $\neq \{1, G\}$ sein in einfachem G:
Nämlich wohl immer wenn G non-strictly simple ist.

ℓsn :

2. Sei $A \in$ ℓsn G, und A sei <u>stark perfekt</u>: $A = \bigcup_{i \in I} S_i$ mit $S_i = S_i'$ sn G.
Dann ist $AB = BA \; \forall B \in$ ℓsn G.

17.7.81 3 A ℓsnℓ $G \iff (AF_{\text{fin gen}} \leq G) A \cap F$ ℓsn F

4 A ℓsn $G \geq G_1 \Rightarrow A \cap G_1$ ℓsnℓ G_1

Für <u>Normalisatorsätze:</u>

Frage: 5 Kann eine Nilgruppe $\neq 1$ perfekt sein?

???1981: Robinson? Ja: Maclain's charakteristisch einfache Gruppen M sind Nilgruppen; diag $M \times M$ ist eine perfekte Ugruppe der Nilgruppe $M \times M$, aber nicht normal!

35/36

6. Beispiele von ℓsn Untergruppen A von G mit $A = \mathcal{N}_G A$ und $A^G = G$ sollten sich in P. Halls Arbeit zum Join Problem finden. (Robinson)

ℓ'sn 7 Nachtrag 13.2.82: Eine andere Definition von lokaler Subnormalität bei Heineken + Schwittek (Preprint eingereicht bei MZ Okt 1981) sowie bei Schwittek (Preprint).

36/37

Grad p^2

Frage von Bhattacharya in OW: Kann bei (nicht 2-abgeschlossenem) primit. G ein minimaler G-Modul L nur eine lin-un. homogene Funktion enthalten?

1. Antwort: Bei Körper $F = \mathbb{Z}_p$ nicht, wenn $p \geq 5$.
   Bew: Sonst oBdA $x \in L$, $L = \langle x^G \rangle_F$,
   $\ni \; y + \sum\limits_0^k a_\nu x^\nu \in L$ mit $2 \leq k \leq p-1$, $a_k \neq 0 \cdots$. Dieses k ist durch L eindeutig bestimmt. Es ist $m = \deg_y L \leq \frac{p-1}{k}$. (i) Wenn $k \geq 3$, so $x^2 \in L$, $\deg_y x^g = m$, $\deg x^{2g} = 2m > 0$ Wid.
   Also $k = 2$. (ii) Wenn $\dim_F L \geq 4$, so $\exists\; yx + cx^3 \in L$, $x \cdot (y + cx^2) \in L$, gleicher Wid..
   Also $\dim_F L = 3$, $F = \langle 1, x, y + x^2 \rangle$ oBdA.
   Für L^2 ist $\deg_y L = 2 \leq \frac{p-1}{2}$, wenn $p \geq 5$, und $(y + x^2)^2$, $x^3 \in L^2$; Wid. wie bei (i).
   Bei $p = 3$ ist $G \leq$ inhom. Aff_2 (3)
   Ähnlich vermutlich über beliebigem $F \geq \mathbb{Z}_p$.

37/38

$\mathcal{M}_{\mathfrak{X}} G$

1 Gibt es immer eine char. Klasse drin?

2 Sind die Proj. $A \neg G^\lambda$ intrav. G^λ und ist $G_\lambda \blacktriangleleft G$ und $A \cap G_\lambda \in \mathfrak{L}_\pi G_\lambda$, so:

$$B \leq G, \quad A^\lambda \underset{G^\lambda}{=} B^\lambda \Rightarrow A \underset{G}{=} B$$

3 In diesem Fall gilt eine Produktformel für $\mathcal{N}_G A$, $\mathcal{N}_{G^\lambda} A^\lambda$

4 Wo Gegenbsp. gegen Stellmachers Vermutung?

38/39

Zerfallskriterien usw.

31.10.81

(1) Sei $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$ <u>eindeutig</u>, G_ν dir. unzerl.

Forts. v. XV 278: Wenn jede Erweiterung jedes G_ν zerfällt, so auch jede von G. (Vielleicht braucht man $Z(G_\nu) = 1$)
Aufgabe: Erweiterung auf minimale Erw-Kerne.

Supplement $\to$ Komplement

(2) Jede beliebige Erweiterung ist Bild einer zerfallenden:
Sei $N \lhd G$, $G = NS$, $N \cap S = D$. Dann ist $G \cong N \rtimes S/E$ mit

$$\text{a)} \begin{cases} E = \{(d, d^-)\} \trianglelefteq G \\ E \cong D \end{cases}$$

b) $NE = N \times E$

1. Beweis a) $G = \langle N, S |$ Multtafel $N, \mathcal{MT}S,\ d_S = d_N \rangle$
2. Beweis a,b): $N \rtimes S = \{(s, n)\}$, $(s_1, n_1)(s_2, n_2) = (s_1 s_2, n_1^{s_2} n_2)$

$$E = \{(d, d^-)\}, \quad (d, d^-)^{(1,n)} = (d, d^-), \quad (d, d^-)^{(s,1)} = (d^s, d^{-s})$$

39/40

Submaximale Untergruppen

15.11.81 1. Def $A \in$ sm $G :\Longleftrightarrow \exists B, H : G$ sn H, $B \lessdot H$, $B \cap G = A$

1′. G char. einfach, perfekt $\Rightarrow$ $1 \in$ sm G
Bew: $H = G$. Aut G
FRAGE: $\Leftarrow$?

2. G aufl $\Rightarrow \forall A \in$ sm G: $|G : A| = p^\alpha$
Bew: Hauptreihe von H durch G^H legen.

Zur Erweiterung von Hupperts Kennzeichnung d überaufl.:

PROBL. 3 $\Leftarrow$?
Gegenbeispiel 43_{10}! (noch nachprüfen)

Bsp 4 $|G| = 168$, G einf. $\Rightarrow \exists A \in$ sm G, $|A| = 8$, $|G : A| = 21 \neq p^\alpha$, $H =$ Aut G, $|B| = 2^4$

Projektionen maximaler Untergruppen in Hauptfakt. :

5 Ist $F = F_1 \times \cdots \times F_n$ ein nicht abelscher Hauptfaktor von G und $M \lessdot G$, so ist, wenn F nicht von M gedeckt wird, $M \neg F = (M \neg F_1) \times \cdots \times (M \neg F_n)$
Bew: M permutiert die F_ν transitiv wegen $F = K/L \Rightarrow M$ deckt G/K, und M läßt $\bigtimes (M \neg F_\nu)$ fest.

40/41

Projektion max. Ugren

$5'$ Forts.: Ist $F_\nu = LG_\nu$, G_ν einköpfig perfekt, so ist

$$|G : M| = |G_1 : M \cap G_1|^n$$

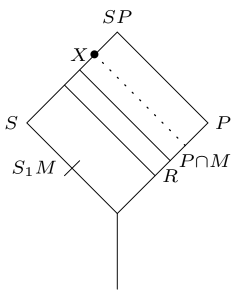
5^{II} $M \cap K$ ist max. $\{$ unter M invariant, $< K$ $\}$.

5^{III}: $M \cap G_\nu$ maximal $\mathcal{N}_M(G_\nu)$-invariant $< G_\nu$.

5^{IV} $M \cap K$ ist normalisatorgleich in K, falls $\neq L$.

5^{V} Daher $M \cap G_\nu$ normalisatorgleich in G_ν

5^{VI} Sei S sn H; P sn H, P eink. perfekt; sei $M \lessdot H$, $R :=$ Rumpf $P \leq M$, $P \not\leq M$, $P \not\leq S$.
Dann $SP/S[M\neg(SP/S)] \cong P : (P \cap M)$



Bew: OBdA S max mit $P \not\leq S$ sn H. Dann läßt $\mathcal{N}_M P$ auch S und SP invariant, also auch $X = S.\ (M \cap SP) \cap P \geq P \cap M$.
nach 5^{III} gilt daher $X = S.(M \cap SP) \cap P = P \cap M$.

Folge 6 eink. perf. unabh. $P_1, \cdots, P_k$ sn H, $R_1 \cdots R_k =$ Rümpfe $\leq M \lessdot H$, S sn H, $P_\kappa \not\leq S$, $T = SP_1P_2 \cdots P_k \Rightarrow$

$$|T : (M \cap T)| = |S : M \cap S| \cdot \prod |P_\kappa : M \cap P_\kappa|$$

41/42

Noch Projektionen maximaler Untergr. in Kompf.

7. Ist $M \lessdot H$ und ist H^ν ein <u>perfekter</u> Kompfaktor von H, der von M nicht gedeckt wird, so ist

   a) jeder von M nicht gedeckte KF H^λ von H ist $\cong H_\nu$,

   b) die zugehörigen einköpfigen perfekten sn Deckgruppen P^λ sind ein volles System konj. Untergruppen von H, auf welches M transitiv wirkt,

Man kann von Projekt. von $M \lessdot G$ in abstrakte Kompfakt reden!

c) die Proj. $M\neg H^\lambda$ ist perspektiv und konj unter M (projektiv) zu $M\neg\frac{P_\lambda}{\text{Rpf } P_\lambda}$

d) alle $H^\lambda : (M\neg H^\lambda)$ sind gleich $|P_\nu : M \cap P_\nu|$.

Folge 7′ $G : M$ ist eine Potenz von $|H^\nu : M\neg H^\nu|$. Also

8 $M \lessdot H$, M deckt einen <u>perfekten</u> KF H^ν von H <u>nicht</u>. Dann ist $M\neg H^\nu = M^* \cap H_\nu$ für ein passendes $\overline{M^*} \lessdot (H^\nu)^* :=$ Aut H^ν.
Bew mit 41 (5^{III})

Satz 9 $M \in$ sm G, G^ν perf. KF von G deckt $\Rightarrow M\neg G^\nu$ sm G^ν.
15.11.81 Frage

42/43

noch Proj. max. Ugr.

GBsp gegen Vermutung 40_2 — 10 Die Gruppe G der Ord $8 \cdot 168$, die durch zerfallende Erweiterung oder elementarabelschen Gruppe der Ord 8 mit G_{168} entsteht, wird treu durch

$$\mathrm{Aff}(3,2) = \left(\begin{array}{cc|c} \cdot & \cdot & \cdot \\ A & \cdot & \cdot \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

über K_2 dargestellt; die Polarität $A \to A'^{-1}$ kann nicht zu einem Autom. von G erweitert werden, weil

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ auf } N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

einen Fixpunkt hat, die transponierte aber nicht.
Daher erleidet G/N bei subnormaler Einbettung in jedes M unter $\mathcal{N}_H G$ nur innere (?) Autom., jedenfalls keine Polarität, und daher hat jede max Ugr. von $(\mathcal{N}_H G)/N$ eine Proj. in G_{168} von Primzahlpotenz-Index.
dh. alle <u>submaximalen Ugr von G haben primäre Indizes,</u> dennoch ist G nicht auflösbar.

Satz 11 Zu jedem nicht-abelschen Hauptfaktor K/L von G gibt es $M \lessdot G$, das K/L nicht deckt.
Bew: Sonst $K/L \leq$ Fratt G/L, K/L nilpotent. Genauer:

43/44

$M \lessdot G$

Satz 12 Ist K/L ein nicht-ab. Hauptfaktor von G, so gibt es zu jeder Sylowgr P/L
17.11.81 von K/L ein $M \lessdot G$, das K/L nicht deckt, aber den Normalisator in K/L der Sylowgruppe P/L deckt.
Bew: Wähle M max. über $\mathcal{N}_G(P/L)$.

Sonderf. 12′ Vor. 12. $\Rightarrow \exists\ M \lessdot G$, M deckt K/L nicht, $|G : M|$ ungerade.
Bew: $P \in \mathrm{Syl}_2 K/L$
(ebenso: M von p-freiem Index), wenn $p|(K : L)$

13 Die nicht primären Maximal-Indizes von G stimmen mit denen von $G/G_{\mathfrak{S}}$ überein; aber nicht mit denen von $G^{\mathfrak{S}}$: Gegenb. $G =$ Aut G_{168}.

13. Schneidet $M \lessdot G$ einen Hauptfaktor von G an, dh. Proj. $M \neg G^\lambda \neq \frac{1}{G^\lambda}$, so ist M durch die Projektion eindeutig bestimmt, als Normalisator.

44/45

13′ Ist aber $M \neg G^\lambda = 1$, so ist M nicht notwendig eindeutig bestimmt. Genauer:

GBsp. 14. In $G = (A_5)^n \overset{\text{Alt}}{\cdot} A_n$, $n > 5$, $N := n(n-1)\cdots 7.6$, gibt es $M_i \cdot \lessdot G$, $i = 1, 2$, beide kernlos, $M_1 \underset{G}{\neq} M_2$.
Beweis: Stelle A_n monomial nach A_5 dar (Grad $n(n-1)\dots 7.6 =: N$), läßt A_5^N fest, dann sind $M_1 =$ <u>dieses</u> A_n <u>und</u> die Permutationsdarstellung M_2 von A_n vom Grad N zwei Komplemente zu A_5^N, beide sind $\lessdot G$, aber nicht konjugiert; denn sie müßten unter A_5^N konjugiert sein, also müßten in die Diagonalfaktoren alle -1 sein, aber sie durchlaufen ganz A_5

Problem 14′ Wann sind $M, M' \lessdot G$ konjugiert?

Aufgabe 15 Durchschnitte unabhängiger maximaler Untergruppen untersuchen, Verallg. von P **???**?

45/46

Einfache Gruppen: Probleme

25.11.81

1. Sind die Untergruppen maximaler ungerader Ordnung intravariant? Das würde dann für alle zusammengesetzten Gruppen auch gelten.

46/47

Durchschnitte von k-maximalen U'gr'en
Subnormale Kerne

26.11.81

(1) Def: $A \leq\cdot\, G :\iff A = G$ oder $A \lessdot G$
$A \leq\cdot\,^{k} G \iff \exists G_\nu : G = G_0 \cdot\!\geq G_1 \cdot\!\geq G_2 \cdot\!\geq \dots \cdot\!\geq G_k = A$
$A \leq\cdot\,^{0} G :\iff A = G.$

(2) $A \leq\cdot\,^{k-1} G \Rightarrow A \leq\cdot\,^{k} G$
weiter $G \in \max_{\mathrm{sn}}$: Dann $\exists A_{\cdot\cdot G} \quad \forall A \leq G.$

(3) $A \leq\cdot\, B \leq G \Rightarrow A_{\cdot\cdot G} \trianglelefteq B$
Bew: Klar ist $A_{\cdot\cdot G} \trianglelefteq A$. Wenn $A_{\cdot\cdot G} = B_{\cdot\cdot G}$, "$\Rightarrow$" trivial. Sei $A_{\cdot\cdot G} < B_{\cdot\cdot G}$.
Dann $\exists C$:

$$A_{\cdot\cdot B} \lhd C \text{ sn } B_{\cdot\cdot G}.$$

$$\mathcal{N} A_{\cdot\cdot G} \geq \langle A, C \rangle \begin{cases} > A \\ \leq B \end{cases} ,$$

also $\langle A, C \rangle = B$.

Satz (4) Aus $G = G_0 \cdot\!\geq G_1 \cdot\!\geq G_2 \cdot\!\geq \dots \cdot\!\geq G_k = A \geq S \in$ sn G folgt
$G \trianglerighteq G_{1\cdot\cdot G} \trianglerighteq G_{2\cdot\cdot G} \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq G_{k\cdot\cdot G} = A_{\cdot\cdot G}$ und
$d(A_{\cdot\cdot G}, G) \leq k$ sowie $S^{kG} \leq A$, wo

$$S^{kG} = \overbrace{S^{S^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{S^G}}}}}}^{k} .$$

Bew: $G_{l\cdot\cdot G} \trianglelefteq (G_{l-1})_{\cdot\cdot G}$ folgt aus (3). Rest klar.

47/48

Noch k-max. Ugr'en
<u>Durchschnitte von k-max Ugr'en:</u>

(5) Sei $A_i \leq\cdot\,^{k} G$, $D := \bigcap\limits_i A_i \geq S \in$ sn G. Dann

a) $d(D_{\cdot\cdot G}, G) \leq k$

b) $S^{kG} \leq A$, $S^{kG} = \underbrace{S^{S^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{S^G}}}}}}_{k}$
Bew: (4)

(5′) Sonderfall $k = 1$: $A_i \leq\cdot\, G$, $D = \bigcap A_i \geq S \in$ sn $G \Rightarrow S^G \leq D$.

$\underline{k\text{-ter Maximal-Abschluß:}}$

Def: Für $H \le G$ setze

$$H^{(k)} := \bigcap_{H \le A \le\cdot^k G} A; \qquad H^{(0)} = G$$

(6) Es ist

$$H^{(k-1)} \ge H^{(k)} \quad (k \in \mathbb{N}). \quad (2)$$

Satz (7) S sn $G \Rightarrow G = S^{(0)} \trianglerighteq S^{(1)} \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq S^{(k)}$
Bew: $k \ge 1 \Rightarrow S^{(k)} = \bigcap_{S \le B \le\cdot^{k-1} G} D(B)$, $D(B) := \bigcap_{S \le A \le\cdot B} A$.
Nach $5'$ ist $\underline{D(B)} = \bigcap_{S^B \le A \le\cdot B} A$, offensichtlich $\underline{\trianglelefteq B}$
$\bigcap_B$ ergibt $S^{(k)} \trianglelefteq \bigcap B = S^{(k-1)}$.

48/49

(8) S sn $G \Rightarrow S^G \trianglelefteq S^{(1)} \trianglelefteq G$ und $S^{(1)}/S^G = \Phi(G/S^G)$
Bew:

$$S^{(1)} = \bigcap_{S^G \le A \le\cdot G} A.$$

Vermutung 9) Vermutung: S sn $G \Rightarrow S^{(k)}/S^{kG} \in \mathfrak{N}$.

Frage (10) Wie verhält sich $S^{(2)}$ zu $S^{(???)} := \bigcap_{S \le T \le\cdot S^{(1)}} M$?

Frage (11) Kann man die Vor. $G \in \max_{\mathrm{sn}}$ weglassen?
oder gehts mit ℓsn statt sn ?

49/50

(1) Den Existenzsatz von Čunikhin braucht man nur für den Fall "großer" Projektionen zu beweisen; dann den Existenzsatz anwenden:
Ist $A \le N \trianglelefteq G$ und deckt $\mathcal{N}_G(A)$ ganz G/N, so gibt es zu jedem π eine Erweiterung von A durch eine π-[Sy-Norm]-Turmgruppe, $A \triangleleft B \le N$, so daß $\mathcal{N}_G(A) \cap \mathcal{N}_G(B)$ ganz G/N deckt. (Also: Das Ergebnis der Č-Konstr. normalisiert die vorg. Proj.!).

(2) Spezialisierung des Exist. Satzes von C. auf "subcharakteristische" Reihen von G muß zu intravar. Lösungen führen.

(3) Kann es vorkommen, daß für $A, B \in \mathfrak{L}_\pi G$ die beiden Projektionen in die Faktoren einer K-Reihe von G stets join-conjugate sind, in die Faktoren einer anderen nicht?

50/51

$\mathfrak{L}_\pi G$, $m_\pi G$ u. Verw.

Verallg. von m_π

(1) Def. A schwach maximale π-Ugr. von $G :\iff (A \leq H \leq G, S$ sn $H \Rightarrow A \cap S \in \mathfrak{L}_\pi S)$

m_π Frage (2) G einfach. $\exists A \in m_\pi G : A \cong B \leq G \Rightarrow A \underset{\langle\ \rangle}{=} B$?

m_π Frage 3 Gibt es stets $A \in m_\pi G$ sodaß $A \cong B \leq G \Rightarrow A \underset{G}{=} B$?

erbl. $\mathfrak{L}_\pi$ 4 Ist $A \neg F \in \mathfrak{L}_\pi F$ für jeden Kompfaktor von G, so gilt

(a) S, T sn $G \Rightarrow A \cap ST = (A \cap S)(A \cap T)$, daher

(b) S, T sn $G \Rightarrow A \cap \langle S, T\rangle = \langle A \cap S, A \cap T\rangle$

5 A submax aufl in G. Dann $B \leq A \iff B$ läßt die Projektionen von A in die nicht aufl. Faktoren F einer Hauptreihe fest.

Frage: Genügt auch $B \neg F \leq A \neg F$?

6. $\left.\begin{array}{l} G \text{ einfach} \\ A \in \text{ sm}_{\mathfrak{X}} G \end{array}\right\} \Rightarrow A$ liegt nicht nur in einem einzigen $B \in m_{\mathfrak{X}} G$; vielmehr gibt's mehrere Isotope zu $B \geq A$ sonst bliebe auch B bei der A festlassenden größten $\mathfrak{X}$-Autom Gr. von G fest.

51/52

Normalisatorsätze

sollten sich nach dem "Stetigkeitsprinzip" variieren lassen, z.B.:
Sei $A = A'$ sn G, A lasse <u>seine</u> SN Teiler "angenähert" fest. Läßt dann A auch die SNTer von G in einem Sinn angenähert fest (z.B. kurze Bahnen ?)?

52/53

Sylow-Normalisator-Türme

Brasilia, 15.7.82

1. $\mathbb{P}_o = \mathbb{P}$ mit fester Anordnung $\Rightarrow$ jeder Kompos.-$\mathbb{P}_o$-Sy No-Turm T (dh mit $T \neg G^\lambda \mathbb{P}_o$-Sy NT G^λ) ist durch seine Projektionen $T \neg G^\lambda$ eindeutig bestimmt. Die Anzahl dieser Gruppen, $n(\mathbb{P}_o, G)$, ist also $= \prod_\lambda n(\mathbb{P}_o, G^\lambda)$.

   Aber (Das ist schon lange klar, weil

$$n(\mathbb{P}_o, G) = |G : T| = \prod |G^\lambda, T^\lambda| = \prod_\lambda n(\mathbb{P}_o, G^\lambda).$$

2. Vermutung: 1 gilt <u>nicht</u> für Komp. $\prod$-Sy No Türme, e.g $\pi = \{2, 3$?

3. 1 gilt allgemein für Gruppen $H \leq G$, für welche $H^\lambda = \mathcal{N}_{G^\lambda}(H^\lambda)$ ist für alle λ:
$$\# \, H^g = \prod_\lambda \#(H^\lambda)^{g_\lambda}.$$

4 Für die H von 3 (bei beliebiger SNR G, !) gilt:
$$F \leq G, F^\lambda = H^\lambda \quad \forall \lambda \Rightarrow F = H.$$

53/54

[Seite 54 ist leer!]

54/55

$\mathfrak{L}_\pi G$ & Gruppen mit nilpotenten π-Hallgruppen

19.8.82

(1) Genau dann ist $|\mathfrak{L}_\pi G : G| = 1$, wenn $\mathfrak{N} \cap \mathcal{H}_\pi G \neq \emptyset$, dh. $G \in E_\pi^n$.
Bew: $\Rightarrow$ Ordne π, nimm $T \in \pi$-Syl Nor Turm G.
$T \in \mathfrak{L}_\pi G$ ist konj in G zu T^* für andere Ordnung. Also $T \in \mathfrak{N} \cap \mathcal{H}_\pi G$.
$\Leftarrow H \in \mathfrak{N} \cap \mathcal{H}_\pi G$, $L \in \mathfrak{L}_\pi G \Rightarrow L \leq H^g \; \exists g$, wegen $L \in \mathfrak{L}_\pi G$ ist $L = H^g$.
NB: Es genügt schon, wenn je zwei <u>auflösbare</u> große π-Ugr von G konj. sind [sogar solche mit Sy-Turm].

(2) $|\mathfrak{L}_\pi G : G| = 1$, $A, B \in \mathfrak{L}_\pi G \Rightarrow A \underset{\langle\,\rangle}{=} B$.
Bew: $A, B \in \mathfrak{N} \cap \mathcal{H}_\pi G \subseteq \mathfrak{N} \cap \mathcal{H}_\pi \langle A, B\rangle$, $\; A \underset{\langle\,\rangle}{=} B$.

(3) $N \trianglelefteq G$, cf $N \subseteq E_\pi^n$, $A, B \in m_\pi G$
$\Rightarrow A \cap N \underset{\langle\,\rangle}{=} B \cap N \in \mathcal{H}_\pi N =$ Komp-π_o-Sy Nor Turm $\forall \pi_o$ (Ordnungen von π)
Bew: Ind $|G|$, $M \leq N$, $M \cdot\!\triangleleft\, G \begin{cases} |M|_\pi = |M| \\ = 1 \\ \text{sonst} \end{cases}$

(4) S sn G, cf $S \subseteq E_\pi^n$, $A \in m_\pi G \Rightarrow A \cap S \in \mathcal{H}_\pi S = K\pi_o$ Sy **???** $S \; \forall \pi_o$, daher $A, B \in m_\pi G \Rightarrow A \cap S \underset{\langle\,\rangle}{=} B \cap S$
Bew: (3)

55/56

<u>cf $G \subseteq E_\pi^n$</u>

Satz (5) cf $G \subseteq E_\pi^n \Rightarrow \forall_o \; sm_\pi G =$ Komp π_o Sy Nor Türme $G \Rightarrow |sm_\pi G : G| = 1$
19.8.82 Bew (4)

(5′) cf $E \subseteq E_\pi^n \iff$ für alle Ordnungen o von π fallen die Komp π_o Sy N Türme zusammen.

56/57

Submaximale π-Untergr.

Satz 1: 20.8.82 Jeder Kompositionsfaktor von N habe die Eigenschaft, daß seine submaximalen π-Untergruppen konjugiert sind. Dann gilt:

a) N hat die gleiche Eigenschaft.

b) Ist $N \trianglelefteq G$, so besteht eine natürliche 1-1-Zuordnung zwischen $m_\pi G : G$ und $m_\pi \overline{G} : \overline{G}$ $(\overline{G} = G/N)$, ebenso zwischen $\mathrm{sm}_\pi G : G$ und $\mathrm{sm}_\pi \overline{G} : \overline{G}$.

Frage 2: Gibt es einfache $G \notin E_\pi^n$ mit $\mathrm{sm}_\pi G : G = 1$?

Frage: Gibt es in jeder zusammeng. Gruppe G ein $A \leq G$ mit A erblich große π-Gruppe in jedem G_1, $A \leq G_1 \leq G$? Das wären wohl die nächsten Verwandten der π-Hallgr.
Ist G einfach, so tut's jede maximale π-Ugr.

57/58

58/59