Universität Tübingen

Mathematisches Institut Tübingen, den 16.04.2008

Übungen zu Algebra II (1)

(1) Sei $L|K$ eine quadratische Körpererweiterung ($[L:K]=2$); sei $\alpha \in L \setminus K$.
(a) $\{1, \alpha\}$ ist eine K-Basis von L.
(b) Es gibt eindeutig bestimmte $a, b \in K$ mit $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$. Setzt man also $f = X^2 + aX + b$, so ist $f \in K[X]$ und $f(\alpha) = 0$.
(c) f ist irreduzibel über K, d.h., $f \in K[X]$ ist unzerlegbar.
(d) f ist ein Primpolynom in $K[X]$, sogar $(f) = fK[X]$ ein maximales Ideal.
(e) Es ist $K[X]/(f) \cong L$ via $X \mapsto \alpha$ (und K-lineare Fortsetzung auf L).
(f) Es gibt genau ein $\beta \in L$ mit $f(X) = (X-\alpha)(X-\beta)$.
(g) Es gilt $\alpha + \beta = -a$ und $\alpha\beta = b$ (Vieta).
(h) Für die sog. *Diskriminante* $D = (\alpha - \beta)^2$ von f gilt $D = a^2 - 4b$.
(i) Sei $x = c + d\alpha$ ein von 0 verschiedenes Element in L ($c, d \in K$). Man gebe $\frac{1}{x} = x^{-1}$ in der Basis $\{1, \alpha\}$ an.
(j) Ist char(K) $\neq 2$, d.h., $2 = 1{+}1 \neq 0$ in K, so ist $\alpha \neq \beta$ ($D \neq 0$) und $\delta = \alpha - \beta \notin K$, somit $L = K(\delta)$. Man gebe dann α, β als K-Linearkombinationen in $1, \delta$ an.

(2) Sei $L|K$ eine Körpererweiterung vom Primzahlgrad $[L:K|=p$. Man zeige, dass $L = K(\alpha)$ ist für geeignetes $\alpha \in L$. Es ist α Wurzel (Nullstelle) eines eindeutig bestimmten normierten irreduziblen Polynoms $f \in K[X]$ mit Grad grd(f) = p.

(3) (a) Der Restklassenring $K = \mathbb{Q}[X]/(X^5 - 2)$ ist ein Körper der Charakteristik 0. Wie steckt $\mathbb{Q}$ in K ? Warum ist $K \cong \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$. Man gebe den Grad $[K:\mathbb{Q}]$ an.
(b) Der Restklassenring $L = \mathbb{F}_2[X]/(X^3 + X + 1)$ ist ein Körper der Ordnung 8.

(4) Unter Verwendung der Tatsache, dass jede positive reelle Zahl ein Quadrat in $\mathbb{R}$ ist, zeige man, dass jede komplexe Zahl ein Quadrat in $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$ ist ($i^2 = -1$). (Zu reellen Zahlen a, b hat man reelle Zahlen c, d zu finden mit $(c + id)^2 = a + ib$.)