Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Tübingen, den 21.04.2008

Übungen zu Algebra II (2)

(5) Jeder Körper K enthält einen eindeutig bestimmten kleinsten Teilkörper P, der von der 1 in K *additiv* erzeugt wird (*Primkörper*). Ist $\mathrm{char}(K) = 0$, so ist $P \cong \mathbb{Q}$; ist $\mathrm{char}(K) \neq 0$, so ist $\mathrm{char}(K) = p$ eine Primzahl und $P \cong \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
Zusatz. Welche Automorphismen hat der Körper P ?

(6) Sei K ein *quadratischer Zahlkörper*, d.h., ein Teilkörper von $\mathbb{C}$ mit $[K : \mathbb{Q}] = 2$. Man zeige, dass es eine eindeutig bestimmte quadratfreie ganze Zahl $d \neq 0, 1$ gibt mit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$.
Zusatz. Welche Automorphismen hat der Körper K ?

(7) Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ der durch die (positiven) Quadratwurzeln von 2 und 3 erzeugte Teilkörper von $\mathbb{R}$.
(a) Man berechne den Grad $[K : \mathbb{Q}]$.
(b) Man zeige, dass $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ ein *primitives* Element für $K|\mathbb{Q}$ ist, d.h., es gilt $K = \mathbb{Q}(\alpha)$.
(c) Man berechne das Minimalpolynom $f = m_{\mathbb{Q},\alpha}$.
(d) f zerfällt in K in (lauter verschiedene) Linearfaktoren.
Zusatz. Welche Automorphismen hat der Körper K ?

(8) Man zeige, dass der Körper $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})$ von $\mathbb{R}$ den Grad 4 über $\mathbb{Q}$ hat. Man zeige ferner, dass $L = K(i)$ der kleinste Teilkörper von $\mathbb{C}$ ist, über welchem das Polynom $X^4 - 5$ in Linearfaktoren zerfällt.
Zusatz. Welche Automorphismen haben die Körper K und L ?