Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Tübingen, den 5.11.2007

Übungen zu Analysis III (4)

(13) Man berechne $\int_\gamma |z|dz$ für folgende glatten Kurven γ:
(a) γ führt *geradlinig* von $\gamma(0) = -i$ nach $\gamma(1) = +i$.
(b) γ führt *entlang* S^1 von $-i$ nach $+i$ im Uhrzeigersinn.
(c) γ führt *entlang* S^1 von $-i$ nach $+i$ im Gegenuhrzeigersinn.

(14) Seien $\gamma_k : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ die (glatten) Kurven mit $\gamma_1(t) = e^{it} \cos t$ bzw. $\gamma_2(t) = e^{it} \cos 2t$, und sei $\gamma_3 = [0, 1] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma_3(t) = te^{2\pi it}$. Man skizziere die Spuren (Bildmengen) dieser Kurven. Ferner berechne man die Bogenlänge $L(\gamma_3)$ sowie die Kurvenintegrale $\int_{\gamma_k} f(z)dz$ für $f(z) = ze^z$ und alle drei Kurven ($k = 1, 2, 3$). (Hinweis: Man finde eine Stammfunktion von f.)

(15) Die entlang der negativen reellen Achse aufgeschlitzte komplexe Ebene $S = \{re^{it} |\ r \in \mathbb{R}_{>0} \text{ und } |t| < \pi\}$ ist ein *sternförmiges* Gebiet (Beweis!), daher einfach-zusammenhängend. Entsprechend ist die offene rechte Halbebene $H = \{z \in \mathbb{C}^* |\ -\pi/2 < \arg(z) < \pi/2\}$ sternförmig. Durch $f : z \mapsto z^2$ ist ein (reeller) Diffeomorphismus und zugleich eine holomorphe Bijektion von H auf S gegeben. Mit Hilfe der Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen zeige man, dass die Umkehrabbildung $g : S \to H$ holomorph ist. Man gebe die Ableitung von g an.

(16) Seien S, H, f, g wie in Aufgabe 14. Man nennt $g(z) = \sqrt{z}$ den *Hauptzweig* der komplexen Quadratwurzelfunktion ($z \in S$). Man zeige:
(a) g hat eine Stammfunktion auf S.
(b) g ist nicht stetig fortsetzbar auf $\mathbb{C}^*$.
(c) Sei γ die glatte Kurve entlang S^1 von $+1$ nach -1 im Gegenuhrzeigersinn. Man zeige, dass das *uneigentliche* Integral $\int_\gamma g(z)dz$ existiert, und berechne dieses. Was erhält man, wenn man entsprechend im Uhrzeigersinn integriert ?