Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Tübingen, den 26.11.2007

Übungen zu Analysis III (7)

(25) Mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel berechne man folgende Integrale:

$$\int_{|z+1|=1} \frac{dz}{(z^2-1)(z-1)^2}\ ; \quad \int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z+i} dz\ ; \quad \int_{|z+2i|=3} \frac{e^z}{z^2+\pi^2} dz.$$

(26) Auf $H = \{z \in \mathbb{C} | \ \mathrm{Re}(z) > 0\}$ stellt f mit $f(z) = \int_\gamma \frac{d\zeta}{z}$ (bekanntlich) eine holomorphe Funktion dar, wenn $\gamma : [0,1] \to H$ irgendeine stetige Kurve mit $\gamma(0) = 2$, $\gamma(1) = z$ ist. Man gebe die Taylor-Reihe von f um den Punkt 2 an. Warum hat die Reihe den Konvergenzradius $R = 2$?

(27) Sei $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ eine ganze Funktion. Man gebe die Taylorentwicklungen von $\mathrm{Re}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$ um 0 bis zum 3. Glied an. Insbesondere beschreibe man die Hesse-Matrizen dieser Funktionen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$.

(28) Sei $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ eine formale Potenzreihe über $\mathbb{C}$. Man gebe notwendige und hineichende Bedingungen dafür an, dass die Inverse $f^{-1} = \frac{1}{f}$ von f in $\mathbb{C}[[X]]$ existiert. Man berechne dann die Koeffizienten von f^{-1} rekursiv.