Universität Tübingen

Mathematisches Institut Tübingen, den 3.12.2007

Übungen zu Analysis III (8)

(29) Man begründe oder widerlege, dass es eine auf $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion f mit folgenden Werten $f(\frac{1}{n})$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gibt:
(a) $1, 0, 1, 0, 1, 0, ...$
(b) $0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{6}, 0, ...$
(c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \cdots$
(d) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \cdots$.

(30) Man bestimme die Singularitäten der folgenden Funktionen und gebe an, von welcher Art sie sind:
(a) $z \mapsto z/(e^z - 1)$
(b) $z \mapsto (1 - e^z)/(1 + e^z)$
(c) $z \mapsto \exp(-1/z)$
(d) $z \mapsto 1/\sin\frac{\pi}{z}$
(e) $z \mapsto (\sin z + \cos z)^{-1}$.

(31) Sei D ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{C}$ und $K = \bar{D}$ der (kompakte) topologische Abschluss von D. Sei $f : K \to \mathbb{C}$ stetig und holomorph auf D. Man zeige mit Hilfe des Maximumprinzips:
(a) Ist $f(\zeta) = 0$ für alle $\zeta \in \partial K$, so ist $f = 0$ auf K.
(b) Ist $|f(\zeta)| = \alpha > 0$ konstant für $\zeta \in \partial K$, so ist entweder $f(z) = c$ konstant für alle $z \in K$ (mit $|c| = \alpha$) oder f hat eine Nullstelle in D.

(32) Sei $D = \{z \in \mathbb{C} | \ |z| < 1\}$ und $f \in \mathcal{H}(\mathcal{D})$. Es gelte $f(0) = 0$ und $f(D) \subseteq D$. Man zeige, dass dann $f(z)| \leq |z|$ gilt für jedes $z \in D$. Ist überdies $|f(a)| = |a|$ für ein $a \in D$, so vermittelt f eine Drehung um den Nullpunkt.
[Hinweis: Aus der Taylorentwicklung von f um den Nullpunkt und der Voraussetzung $f(0) = 0$ folgere man, dass $z \mapsto \frac{f(z)}{z}$ holomorph auf D ist. Daher gilt $\frac{|f(z)|}{|z|} < \frac{1}{r}$ für $|z| = r \neq 0$ wegen $f(D) \subseteq D$, somit für $|z| \leq r$ nach dem Maximumprinzip.]