Universität Tübingen

Mathematisches Institut

Tübingen, den 17.12.2007

Übungen zu Analysis III (10)

(37) Man berechne $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz$.

(38) Man berechne $\int_{\gamma_j} \frac{e^{iz}}{z} dz$ für folgende glatten Kurven γ_j:
(1) γ_1 geradlinig von $\rho > 0$ bis $r > \rho$.
(2) γ_2 längs $|z| = r$ von $+r$ bis $-r$ durch die obere Halbebene.
(3) γ_3 geradlinig von $-r$ bis $-\rho$.
(4) γ_4 längs $|z| = \rho$ von $-\rho$ bis $+\rho$ durch die obere Halbebene.
Zusatz: Man zeige $\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$.

(39) Im Anschluss an Übung (38) zeige man $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

(40) Das Residuum einer auf $\mathbb{C}$ meromorphen Funktion f in ∞ ist definitionsgemäß das Residuum von $z \mapsto -\frac{1}{z^2} f(1/z)$ in 0. Ist $f = \frac{p}{q}$ eine rationale Funktion (p, q Polynome, $q \neq 0$), so ist $\sum_{a\in P_f} \mathrm{Res}_f(a) = 0$, wobei die Summation über alle Polstellen von f inklusive ∞ erfolgt (Beweis!). Unter Anwendung von (10.9) der Vorlesung folgere man, dass ein komplexes Polynom p vom Grade $n \geq 1$ genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$ hat (gezählt mit Vielfachheiten).