Universität Tübingen
Mathematisches Institut Tübingen, den 14.01.2008

Übungen zu Analysis III (12)

(45) Man gebe eine gebrochen lineare Transformation f an, die den Einheitskreis $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ konform in den Kreis $F = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| < 1\}$ abbildet. Man zeige daüberhinaus, dass es genau ein solches f gibt mit $f(0) = \frac{1}{2}$ und $f(1) = 0$. Warum muss dann $f(\infty) = -1$ gelten ? (Der Punkt ∞ ist das Spiegelbild von 0 am Einheitskreis.)

(46) Sei $f : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ eine gebrochen lineare Transformation ($a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $ad - bc \neq 0$).
(a) Man kann die Koeffizienten a, b, c, d durch Multiplikation mit einem geeigneten $e \in \mathbb{C}^*$ so abändern, dass $ad - bc = 1$ gilt.
(b) Sind a, b, c, d reell, so kann man dies nur dann mit einem geeigneten $e \in \mathbb{R}^*$ erreichen, wenn $ad - bc > 0$ ist.

(47) Man löse die Differentialgleichung $y' = xy$ unter folgenden Anfangsbedingungen:
(a) $y(0) = 1$;
(b) $y(0) = 0$;
(c) $y(0) = -1$.

(48) Man löse das Anfangswertproblem (AWP) $y' = \sin x \cdot e^y$, $y(0) = y_0$ für jedes vorgegebene reelle y_0. Man zeige, dass in jedem Falle eine eindeutig bestimmte maximale Lösung (I, γ) existiert, allerdings abhängig von der Wahl von y_0. Ist $y_0 = -\ln 2$, so ist $I = \mathbb{R}$, während $I = \big(-\arccos(1 - e^{-y_0}), \arccos(1 - e^{-y_0})\big)$ ist für $y_0 > -\ln 2$.