

Übungen zu Analysis III (13)

Sei $H_o = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ die obere Halbebene.

- (49) Warum ist H_o ein einfach-zusammenhängendes Gebiet ?
- (50) Ist $f : z \mapsto \frac{1}{z+1}$ holomorph auf H_o ? Man berechne ggf. f' . Hat f eine Stammfunktion auf H_o ? Man gebe ggf. eine solche an.
- (51) Sei f wie in (50). Man gebe das Bild $f(H_o)$ an (Begründung !)
- (52) Man berechne $\int_{|z-1|=3} \frac{dz}{1+z}$.
- (53) Man berechne den Hauptwert von $\sqrt{i-1}$. Welches ist der Nebenwert ?
- (54) Sei $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$. Man zeige $\text{Res}_f(1) = 1$ und $\text{Res}_f(2) = -1$. (Hinweis:
 $f(z) = \frac{1}{(z-2)^2} \cdot \frac{2+(z-2)}{1+(z-2)} = \frac{1}{(z-2)^2} \cdot (2 + (z-2))(1 - (z-2) + \frac{(z-2)^2}{2} + \dots) = \frac{2}{(z-2)^2} - \frac{1}{z-2} + a_0 + a_1(z-2) + \dots$.)
- (55) Man berechne $\int_{|z|=3} \frac{z}{(z-1)(z-2)^2} dz$.
- (56) Sei $f \in \mathcal{H}(H_o)$ mit $f(z) = 0$ für alle $z \in H_o$ mit $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$. Was ist f ? (Begründung !)
- (57) Seien g, h holomorph auf H_o , beide verschieden von der Nullfunktion auf H_o . Warum hat die meromorphe Funktion $f = \frac{g}{h}$ nur (isolierte) Pole auf H_o ? Warum gibt es eine auf H_o meromorphe Funktion \tilde{f} derart, dass $f \cdot \tilde{f}$ auf H_o nur hebbare Singularitäten hat und gehoben die konstante Funktion 1 ist ?
- (58) Sei $f = \frac{g}{h}$ wie in (57). Ist $a \in H_o$ mit $h(a) = 0$, $h'(a) \neq 0$, so ist $\text{Res}_f(a) = g(a)/h'(a)$.
- (59) Man löse das Anfangswertproblem $y' = -\frac{1}{xy^2}$, $y(1) = 1$. In welchem größten offenen Intervall existiert die Lösung ?
- (60) Man löse das Anfangswertproblem $y'' = -2y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.