Universität Tübingen
Mathematisches Institut Tübingen, den 19.11.2007

Lösungen einiger Aufgaben zu Analysis III

(11) $D = \{z \in \mathbb{C}|\ |z| < 1\}$, $f : D \to \mathbb{C}$ mit $f(0) = 0$ und $f(z) = e^{-1/|z|}$ sonst. f ist sicherlich stetig für $z \neq 0$, aber nicht (komplex) differenzierbar wegen $(f(z+tz)-f(z)/tz \to \frac{1}{|z|^2}e^{\frac{-1}{|z|}-i\arg(z)} \neq 0$ für reelles $t \to 0$. In $z = 0$ ist f sogar differenzierbar wegen $(f(h) - f(0))/h = \frac{1}{|h|}e^{-1/|h|}$ für $h \neq 0$, und$f'(0) = 0$.

(12) (a) Ist $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f_1(x, y) = x^3-6x^2y-3xy^2+2y^3$, so ist $\Delta f_1 = 0 = \frac{\partial^2 f_1}{\partial z \partial \bar{z}}$. Setzt man $f_2(x, y) = 2x^3+3x^2-6xy^2-y^3$ (etwa), so ist $f = f_1+if_2$ holomorph (auf $\mathbb{C}$) aufgrund der Cauchy–Riemannschen DGLen. (Eine auf einem einfach-zusammenhängenden Gebiet reelle harmonische Funktion f_1 ist stets Realteil einer holomorphen Funktion $f = 2\frac{\partial f_1}{\partial z}$.)
(b) Ist $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f_1(x, y) = x^3 - 6x^2 - 3xy^2 + 2y^2$, so ist $\Delta f_1 \neq 0$ und daher f_1 nicht der Realteil einer (auf $\mathbb{C}$) holomorphen Funktion nach (3.7) der Vorlesung.

(13) (a) $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = it$, liefert $\int_\gamma |z|dz = 2i\int_0^1 tdt = i$.
(b) $\gamma : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$, liefert $\int_\gamma |z|dz = 2i$.
(c) $\gamma : [\pi/2, 3\pi/2] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{-it}$, liefert $\int_\gamma |z|dz = 2i$.

(15), (16) $S = \{re^{it}|\ r \in \mathbb{R}_{>0},\ -\pi < t < \pi\}$ und $H = \{re^{it}|\ r \in \mathbb{R}_{>0},\ -\pi/2 < t < \pi/2\}$ sind einfach-zusammenhängende (sternförmige) Gebiete. $f : H \to S$, $f(re^{it}) = (re^{it})^2 = r^2e^{2it}$, ist bijektiv. f ist holomorph, $f'(z) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$ die (reelle, stetige) Funktionalmatrix bei $z = x + iy$. Sei $g : S \to H$ die Umkehrabbildung. Wegen $g'(z^2) = f'(z)^{-1} = \frac{1}{2(x^2+y^2)}\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \frac{1}{2z}$ ist g holomorph (Cauchy–Riemann), und $g'(w) = \frac{1}{2g(w)}$ in S. Wir nennen $g(w) = \sqrt{w}$ den Hauptzweig der Quadratwurzel ($w \in S$). Nach (6.8) der Vorlesung hat g auf S eine Stammfunktion G (etwa $G : z \mapsto \frac{2}{3}z^{3/2}$). Es ist $\lim_{t\nearrow\pi} g(e^{it}) = i$ aber $\lim_{t\searrow-\pi} g(e^{it}) = -i$. Für $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = e^{it}$ bzw. e^{-it} erhält man $\int_\gamma g(z)dz = -2 + 2i$ bzw. $-2 - 2i$.

(17) $\mathrm{Log} : \mathrm{S} \to \mathrm{H}$ mit $\mathrm{Log(z)} = \mathrm{Log(re^{it})} = \ln \mathrm{r} + \mathrm{it} = \ln\sqrt{\mathrm{x^2 + y^2}} + \mathrm{i} \arcsin \frac{\mathrm{y}}{\sqrt{\mathrm{x^2+y^2}}}$ erfüllt $\mathrm{Log}(1) = 0$ und $\exp \circ \mathrm{Log} = \mathrm{id_S}$. Entweder wendet man (6.9) der Vorlesung an oder zeigt direkt, dass Log reell differenzierbar ist und dass die Cauchy–Riemannschen DGLen gelten. Es ist $\int_\gamma \frac{dz}{z} = \mathrm{Log}(1+\pi\mathrm{i})-\mathrm{Log}(-\pi\mathrm{i}) = \ln(\sqrt{1 + \pi^2}/\pi) + \mathrm{i}(\arctan \pi + \pi/2)$.