Universität Tübingen

Mathematisches Institut Tübingen, den 18.04.2007

Übungen zur Charaktertheorie (1)

(1) Sei A eine K-Algebra (assoziativ mit $1 \neq 0$) über dem Körper K. Ist $\dim_{\mathrm{K}}\mathrm{A} = 2$, so ist A kommutativ und genau eine der folgenden Aussagen gilt:
(i) A is ein Körper (vom Grade 2 über $K = K \cdot 1$).
(ii) A enthält ein Element $a \neq 0$ mit $a^2 = 0$.
(iii) $A \cong K \times K$ bei komponentenweiser Addition und Multiplikation.

(2) Sei A die Algebra aller oberen 2×2-Matrizen über dem Körper K. Man zeige:
(a) A ist nicht kommutativ, $\dim_{\mathrm{K}}\mathrm{A} = 3$ und $\dim_{\mathrm{K}}\mathrm{Z(A)} = 1$.
(b) Die Teilmenge J aller echten oberen Dreiecksmatrizen ist ein (zweiseitiges) Ideal der K-Dimension 1 von A, mit $J^2 = 0$.
(c) Es gibt keine Gruppe G mit $KG \cong A$.

(3) Sei $A = KG$ die *Gruppenalgebra* der endlichen Gruppe G über dem Körper K.
(a) $I_G = \langle g - 1 \,|\, 1 \neq g \in G \rangle_K$ ist ein Ideal von A der Kodimension 1, nämlich der Kern des K-Algebra-Epimorphismus' von A auf K mit $g \mapsto 1$ für jedes $g \in G$ ("Augmentationsideal").
(b) $S_G = \langle \sum_{g \in G} g \rangle_K$ ist ein 1-dimensionales Ideal von A ("Spurideal").
(c) Genau dann gilt $S_G \subseteq I_G$, wenn $\mathrm{char(K)}$ kein Teiler von $|G|$ ist.

(4) Wann ist die Gruppenalgebra KG der endlichen Gruppe G über dem Körper K isomorph zu einer vollen Matrixalgebra $M_n(K)$? Wann ist KG eine Divisionsalgebra, d.h., jedes Element $\neq 0$ (multiplikativ) invertierbar ?