Universität Tübingen

Mathematisches Institut Tübingen, den 25.06.2007

Übungen zur Charaktertheorie (10)

Durchweg ist G eine endliche Gruppe, $k = k(G)$ die Klassenzahl.

(37) Sei π der Permutationscharakter für die Wirkung von G auf sich durch Konjugation. Man zeige:
(a) Für jedes $g \in G$ gilt $\pi(g) = |C_G(g)|$.
(b) $\langle \pi, 1_G \rangle = k(G)$.

(38) Sei $(\chi_i(g_j))_{i,j}$ "die" Charaktertafel von G. Man zeige:
(a) Für jedes i ist die Summe $s_i = \sum_{j=1}^{k} \chi_i(g_j)$ über die i-te Zeile eine nichtnegative ganze Zahl. Es ist nämlich $s_i = \langle \pi, \chi_i \rangle$ mit π wie in Aufgabe 37.
(b) Es ist $s = \sum_{i=1}^{k} s_i \leq |G|$. Genau dann gilt $s = |G|$, wenn $G' \leq Z(G)$ ist, d.h., wenn G nilpotent der Klasse höchstens 2 ist.

(39) Seien χ, ψ irreduzible Charaktere von G. Ist ψ linear ($\psi(1) = 1$), so ist $\chi \cdot \psi$ irreduzibel. Man gebe ein Beispiel dafür an, dass dies im allgemeinen nicht richtig ist.

(40) Sei $m_G = \max\{\chi(1) | \chi \in \mathrm{Irr}(G)\}$. Für jede Untergruppe $H \leq G$ gilt

$$m_H \leq m_G \leq |G : H| m_H.$$

Ist insbesondere H abelsch, so ist $m_G \leq |G : H|$.