Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Tübingen, den 2.07.2007

Übungen zur Charaktertheorie (11)

Durchweg ist G eine endliche Gruppe.

(41) Seien $H \leq X \leq G$ Untergruppen und θ eine komplexe Klassenfunktion auf H.
(a) Es gilt die Transitivität $(\theta^X)^G = \theta^G$.
(b) Ist χ eine komplexe Klassenfunktion von G, so gilt $(\theta \cdot \chi_H)^G = \theta^G \cdot \chi$.

(42) Sei $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ und N ein Normalteiler von G. Ist $\langle \chi_N, 1_N \rangle_N \neq 0$, so ist $N \leq \mathrm{Ker}(\chi)$.

(43) Sei p eine Primzahl. Man zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:
(i) G ist p-nilpotent (d.h., G hat einen p'-Normalteiler N, dessen Faktorgruppe G/N eine p-Gruppe ist).
(ii) $\chi(1)$ ist eine p-Potenz für jedes $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$.

(44) Sei M eine transitive G-Menge und $H = G_\alpha$ ein Punktstabilisator ($\alpha \in M$). Sei $V = KM$ der zugehörige Permutationsmodul über dem Körper K.
(a) $I(V) = \langle \beta - \alpha |\ \beta \in M \rangle_K$ ist ein Teilmodul von V und $V/I(V) \cong K_G$ der größte Faktormodul von V, auf welchem G trivial operiert.
(b) $S(V) = K \sum_{\beta \in M} \beta$ ist ein Teilmodul von V isomorph zu K_G, und der größte Teilmodul von V, auf welchem G trivial operiert.
(c) Genau dann ist $V = I(V) \oplus S(V)$, wenn char(K) kein Teiler von $|M|$ ist.