Universität Tübingen

Mathematisches Institut   Tübingen, den 15.05.2007

Übungen zur Charaktertheorie (5)

(17) Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$ und N ein p'-Normalteiler der endlichen Gruppe G.
(a) $e = \frac{1}{|N|} \sum_{x \in N} x$ ist ein zentrales Idempotent von KG.
(b) Ist $\{t_i\}$ ein Repräsentantensystem für die Nebenklassen von N in G, so ist $e(KG) = \bigoplus_i Ket_i$ isomorph zu $K[G/N]$ als K-Algebra.
(c) Ist G/N eine p-Gruppe, so ist $B = e(KG)$ ein Block von KG.

(18) Seien $\varphi : A \to M_n(K)$ und $\psi : A \to M_m(K)$ irreduzible Matrixdarstellungen der K-Algebra A. Es existiere eine $m \times n$-Matrix $T \neq 0$ über K mit $T\varphi(a) = \psi(a)T$ für alle $a \in A$. Man zeige, dass dann $m = n$ ist. Ist K algebraisch abgeschlossen, so ist T bis auf skalare Vielfache eindeutig bestimmt.

(19) Sei $\varphi : G \to \mathrm{GL}_n(K)$ eine irreduzible Matrixdarstellung der endlichen Gruppe G über dem Körper K. Ist φ nicht die (triviale) 1-Darstellung, so ist die Summe $\sum_{g \in G} \varphi(g) = 0$.

(20) Sei H eine Untergruppe der endlichen Gruppe G und K ein Körper der Charakteristik $p > 0$ mit $p \nmid |G : H|$. Sei U ein KG-Teilmodul des KG-Moduls V. Es existiere ein KH-Modul W mit $V = U \oplus W$. Man zeige, dass es einen KG-Modul $\widetilde{U}$ gibt mit $V = U \oplus \widetilde{U}$. (Ist $\pi : V \twoheadrightarrow U$ die H-Projektion bzgl. W, so studiere man $\widetilde{\pi} : V \to U$ mit $\widetilde{\pi}(v) = \frac{1}{|G:H|} \sum_i \pi(vt_i)t_i^{-1}$ für eine Rechtstransversale $\{t_i\}$ zu H in G. Man betrachte $\widetilde{U} = \mathrm{Ker}(\widetilde{\pi})$.)