Universität Tübingen
Mathematisches Institut Tübingen, den 22.05.2007

Übungen zur Charaktertheorie (6)

(21) Sei G eine endliche Gruppe.
(a) Hat jede irreduzible $\mathbb{C}$-Darstellung von G den Grad 1, so ist G abelsch.
(b) Hat jede irreduzible $\mathbb{R}$-Darstellung von G den Grad 1, so ist G eine elementarabelsche 2-Gruppe.

(22) Ist G eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung 8, so ist

$$\mathbb{C}G \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times M_2(\mathbb{C}).$$

(Es gibt zwei nichtisomorphe solche Gruppen, nämlich D_4 und Q_8.)

(23) Es ist $\mathbb{R}D_4 \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M_2(\mathbb{R})$ und $\mathbb{R}Q_8 \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{H}$, wobei $\mathbb{H} = \left(\frac{-1,-1}{\mathbb{R}}\right)$ die (Hamiltonsche) Quaternionenalgebra ist.

(24) Sei G eine endliche Gruppe und $\pi \neq \varnothing$ eine endliche Primzahlmenge, $\pi' = \mathbb{P} \smallsetminus \pi$. Jedes Element $g \in G$ hat eine eindeutige Darstellung

$$g = g_\pi g_{\pi'} = g_{\pi'} g_\pi$$

mit einem π-Element g_π und einem π'-Element $g_{\pi'}$ in G.