Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Tübingen, den 23.10.2007

Übungen zur Elementaren Zahlentheorie (2)

(5) Man berechne $\mathrm{ggT}(721, 448) = x \cdot 721 + y \cdot 448$ mit $x, y \in \mathbb{Z}$.

(6) Seien $a, b, c \in \mathbb{N}_{>0}$. Man zeige, dass es genau dann $x, y \in \mathbb{Z}$ gibt mit $xa+yb = c$, wenn c durch a und b teilbar ist.

(7) Seien $a, b, m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$. Wir schreiben $a \equiv b \pmod{m}$, falls $m|a-b$ gilt. Man zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ definiert, die mit der Addition und Multiplikation verträglich ist ("Kongruenzrelation"). Wann ist eine Kongruenz $xa+yb \equiv c \pmod{m}$ lösbar (mit $x, y \in \mathbb{Z}$) ? Ist $m = p$ eine Primzahl und $p \nmid a$, so ist jede Kongruenz $xa \equiv c \pmod{p}$ lösbar.

(8) Erfüllt eine rationale Zahl x eine algebraische Gleichung

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

mit ganzen Zahlen a_i, so ist x selbst eine ganze Zahl (Gauß). Man folgere, dass $\sqrt{p}$ irrational ist für alle Primzahlen p.