Universität Tübingen

Mathematisches Institut Tübingen, den 27.11.2007

Übungen zur Elementaren Zahlentheorie (7)

(25) Sei k eine natürliche Zahl.
(a) Ist $2^k + 1$ eine Primzahl, so ist k eine 2-Potenz.
(b) Ist $2^k - 1$ eine Primzahl, so ist k eine Primzahl.

(26) Produkte von Summen von 3 Qadraten sind i.a. nicht wieder Summen von 3 Quadraten (Beispiel !).

(27) Die natürliche Zahl n habe die Darstellung $n = x^2 + y^2$ mit $x, y \in \mathbb{Q}$. Man zeige, dass $n = a^2 + b^2$ für geeignete $a, b \in \mathbb{N}$ ist.

(28) Seien a, b von 0 verschiedene ganze Zahlen mit $D = a^2 - 4b \neq 0$. Seien α, β die Wurzeln von $X^2 - aX + b$, also $\alpha + \beta = a$, $\alpha\beta = b$ und (etwa) $\alpha - \beta = \sqrt{D}$. Die Folgen $u_n = u_n(a, b) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ und $v_n = v_n(a, b) = \alpha^n + \beta^n$ heißen die *Lucas-Folgen* zu a, b.
(a) Für $a = 1, b = -1$ ist $\{u_n\}$ die Fibonacci-Folge und $\{v_n\}$ ist die Folge der sog. Lucas-Zahlen. Man berechne v_n für $n \leq 10$.
(b) Für $a = 3, b = 2$ ist $u_n = 2^n - 1$ und $v_n = 2^n + 1$. (Diese Folgen haben Fermat einige schlaflose Nächte bereitet.)
(c) Die $u_n(2, -1)$, $v_n(2, -1)$ heißen *Pellsche Zahlen.* Man gebe jeweils die ersten 10 an.
(d) Man zeige $u_n(a + b, ab) = \frac{a^n + b^n}{a - b}$ und $v_n(a + b, ab) = a^n + b^n$.
Bemerkung: Ist p eine ungerade Primzahl mit $p \nmid D$, so gilt (ohne Beweis)

$$u_{n-(\frac{D}{p})} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Eine ungerade natürliche Zahl p teilerfremd zu D, für welche diese Kongruenz gilt (das Legendre-Symbol erweitert zum Jacobi-Symbol), heißt eine Lucas-Pseudoprimzahl.